Classe: TSSI	Date: 20/11/2013	**Type**
Devoir n°7		**Interrogation**
Thème: Fonctions trigonométriques		

Question 1

Résoudre sur $[0;2\pi]$ l'équation $\cos(x)=-\frac{1}{2}$.

Question 2

Déterminer le signe de $\sqrt{(3)}-2\cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Question 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f(x)=3x-\sin(2x)$

$g(x)=7\cos(2x+1)$

$h(x)=2-3x\cos(x)$

Question 4

Déterminer la limite en 0^+ de $k(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}$.

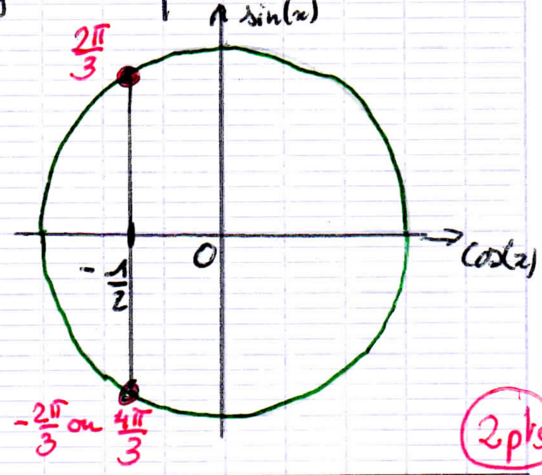
Question 5

a) Encadrer la fonction $R(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x>0$.

b) En déduire la limite en 0^+ de la fonction $R(x)$.

Correction du devoir

Question 1 : On résout l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.
Pour cela, j'utilise le cercle trigonométrique :



Nous avons donc sur $[0; 2\pi]$:

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}}$$

2pts

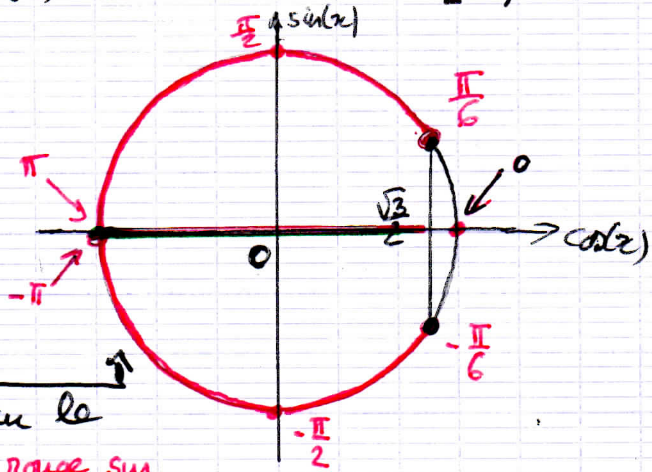
Question 2 : Signe de $\sqrt{3} - 2\cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

- $\sqrt{3} - 2\cos(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos(x) \geq -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

on regarde sur le cercle. (en rouge sur le cercle les valeurs de x qui correspondent à $\sqrt{3} - 2\cos(x) \geq 0$



D'où le tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$\sqrt{3} - 2\cos(x)$		+	0	−	0	+	

3pts

Question 3

$$f(x) = 3x - \sin(2x)$$

$$\boxed{f'(x) = 3 - 2\cos(2x)}$$

1pt

$$g(x) = 7\cos(2x+1)$$

$$g'(x) = 7 \times (2) \times (-\sin(2x+1))$$

$$\boxed{g'(x) = -14\sin(2x+1)}$$

1pt

$$h(x) = 2 - 3x\cos(x)$$

$$h'(x) = 0 - 3(1\cos(x) + x \times (-\sin(x)))$$

$$h'(x) = -3(\cos(x) - x\sin(x))$$

$$\boxed{h'(x) = -3\cos(x) + 3x\sin(x)}$$

1pt

Question 4 :

$$k(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\sin(x)}{x}$$

or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = +\infty}$

2pts

Question 5 :

a) On a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

donc, comme $x > 0$: $\boxed{-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x}$

2pts

b) Nous avons montré que pour $x>0$:

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x) = 0 \end{cases}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

c.à.d : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} R(x) = 0}$

2pts