Classe: TSSI	Date: 09/10/2013	**Type**
Devoir n°4		**Devoir surveillé**
Thème: Suites, nombres complexes, limites.		

Exercice 1 (Suites)

On considère une droite D munie d'un repère $(O;\vec{i})$.

Soit (A_n) la suite de points de la droite D ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1°) a) Placer sur un dessin la droite D et les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

(On prendra 10 cm comme unité).

b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.

Déterminer les valeurs de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

2°) On admet que $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$.

Vérifier cette relation avec les valeurs de la question 1°)b).

3°) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=a_n-\frac{2}{3}$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

4°) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

Exercice 2 (Nombres complexes)

Les questions 1°) 2°) 3°) et 4°) sont indépendantes.

1°) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2+7i} \; ; \; \frac{2-i}{5+3i} \; ; \; \frac{2+i}{i}.$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z:

a) $(1+i)z=3-2i$

b) $z^2-2z+5=0$.

3°) a) Soit z un nombre complexe

On pose $Z=z+2\bar{z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

En écrivant $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, déterminer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b) Résoudre l'équation $z+2\bar{z}=9+2i$.

4°) a)Démontrer que pour tout nombre complexe z : $(z-1)(z^2+z+1)=z^3-1$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^3=1$.

<u>Exercice 3 (Limites)</u>

Les questions 1°) et 2°) sont indépendantes.

1°) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ b) $g(x)=\dfrac{5x+9}{3-x}$.

2°) On pose $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Etudier le signe du polynôme x^2-3x+2.

c) Etudier les limites aux bornes de l'intervalle de définition et traduire les résultats trouvés en terme d'asymptote s'il y a lieu.

<u>Barème</u> : *<u>Exercice 1</u> : 6 points (1+1+2+2)*

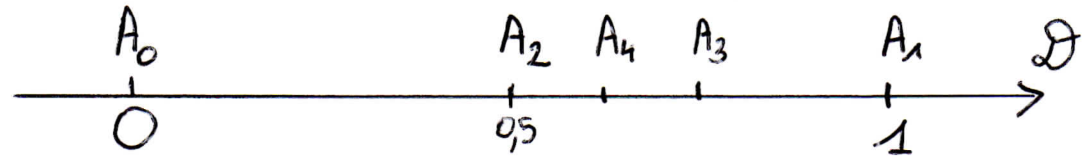
<u>Exercice 2</u> : 7 points (1,5+2+1,5+2)

<u>Exercice 3</u> : 7 points (2+5)

Correction du devoir

Exercice n°1

1°) a)



0,5

b) $\boxed{a_0 = 0}$ car A_0 est le point d'abscisse 0.

$\boxed{a_1 = 1}$ car A_1 est le point d'abscisse 1.

$\boxed{a_2 = \dfrac{a_0 + a_1}{2} = \dfrac{1}{2}}$ car A_2 est le milieu de $[A_0A_1]$

$\boxed{a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}}$ car A_3 est le milieu de $[A_1A_2]$

$a_4 = \dfrac{a_3 + a_2}{2}$ car A_4 est le milieu de $[A_2A_3]$

0,5

$\boxed{a_4 = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5}{4}}{2} = \dfrac{5}{8}}$

2°) Vérifions la formule $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

<u>pour $n=0$</u> : $-\frac{1}{2}a_0 + 1 = 1 = a_1$ <u>Vraie</u>

<u>pour $n=1$</u> : $-\frac{1}{2}a_1 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = a_2$ <u>Vraie</u>

<u>pour $n=2$</u> : $-\frac{1}{2}a_2 + 1 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$ <u>Vraie</u>

<u>pour $n=3$</u> : $-\frac{1}{2}a_3 + 1 = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}$ Vraie. 1

3°) <u>On a</u> : $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$ par définition

$= -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3}$ car $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

$= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2} v_n$

2

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

4°) Comme (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ on sait que : $v_n = v_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

or $v_0 = a_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

Donc $v_n = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$ 1

Nous avons aussi : $a_n = v_n + \frac{2}{3}$ (car $v_n = a_n - \frac{2}{3}$)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) + \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = \frac{2}{3}}$ 1

Exercice 2 :

1°) $\frac{1}{2+7i} = \frac{2-7i}{4+49} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i$ 0,5

$\frac{2-i}{5+3i} = \frac{(2-i)(5-3i)}{25+9} = \frac{10-6i-5i-3}{34} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$ 0,5

$\frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)(-i)}{1} = -2i+1 = 1-2i$ 0,5

2°) a) $(1+i)z = 3-2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{3-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(3-2i)(1-i)}{1+1} \Leftrightarrow z = \frac{3-3i-2i+2i^2}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1-5i}{2} \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$ 1

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

C'est une équation de degré 2, son discriminant vaut : $\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16$

Il y a donc deux solutions complexes :

$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i$; $z_2 = 1 + 2i$ 1

3°) a) $Z = z + 2\bar{z}$

posons $z = x + iy$

Donc $Z = x + iy + 2(x - iy)$

$Z = x + iy + 2x - 2iy$

$Z = 3x - iy$

D'où $\boxed{\mathrm{Re}(Z) = 3x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(Z) = -y}$

1

b) $z + 2\bar{z} = 9 + 2i$

$\Leftrightarrow 3x - iy = 9 + 2i$ où $z = x + iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ -y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = 3 - 2i}$

0,5

4°) a) $(z-1)(z^2+z+1) = z^3 + \cancel{z^2} + \cancel{z} - \cancel{z^2} - \cancel{z} - 1 = z^3 - 1$ CQFD

0,5

b) Ainsi $z^3 = 1$

$\Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$ (voir a))

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

on calcule $\Delta = 1 - 4 = -3$

Il y a deux solutions complexes conjugués

$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{z = 1 \text{ ou } z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1,5

Exercice 3

1°) a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

Une fraction rationnelle se comporte en $\pm\infty$ comme le quotient de ses monômes de plus haut degré.

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

0,5

et on a aussi : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x) = -\infty$ 0,5

b) On utilise le même théorème et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-5) = -5$$ 0,5

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-5) = -5$$ 0,5

2°) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

a) f est définie lorsque $x^2-3x+2 \neq 0$

or $x^2-3x+2=0$

$\Delta = 9-4\times 2 = 1$

Il y a deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$

Donc f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[}$ 0,5

b) x^2-3x+2 est une polynôme de degré 2, il est donc du signe de $a=1$ sauf entre les racines 1 et 2 (voir calcul avant)

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

1,5

c) Il faut déterminer les limites en $\pm\infty$, en 1^- et 1^+ et en 2^- et 2^+.

- $\boxed{\text{en} \pm \infty}$ une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses monômes de plus haut degré ; donc
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

    La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à $\mathcal{C}_f$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

    La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$. 1

- <u>limites en 1</u>

$\lim\limits_{x \to 1} (x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 3x + 2) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$

voir tableau de signe

$\lim\limits_{x \to 1} (x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 2) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$

Ces deux résultats signifient que la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ 1

- <u>limites en 2</u>

$\lim\limits_{x \to 2} (x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 3x + 2) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty}$

voir tableau de signe

Ces deux résultats signifient que la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x \to 2} (x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3x + 2) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty}$ 1