

Devoir n°3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

Sujet A

1°) $z^2 + 81 - 18z = 25$

2°) $z^2 + z + 1 = 0$

3°) $\frac{z+1}{z-1} = 2+i$

4°) $z^2 - 16 = -10z - 25$

Sujet B

1°) $25 + z^2 + 10z = 16$

2°) $z^2 - z + 1 = 0$

3°) $\frac{z-1}{z+1} = 1+2i$

4°) $z^2 = 18z - 56$

Correction du sujet A

1°) $z^2 + 81 - 18z = 25$

$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 56 = 0$

C'est une équation de degré 2

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 56 = 100$

Il y a deux racines réelles

$$\begin{cases} z_1 = \frac{18-10}{2} = 4 \\ z_2 = \frac{18+10}{2} = 14 \end{cases}$$

1 pt

2°) $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3$

Il y a deux racines complexes

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2 pts

3°) $\frac{z+1}{z-1} = 2+i$

$\Leftrightarrow z+1 = (2+i)(z-1) \quad (z \neq 1)$

$\Leftrightarrow z+1 = 2z-2+iz-i \quad (z \neq 1)$

Correction du sujet B

1°) $25 + z^2 + 10z = 16$

$\Leftrightarrow z^2 + 10z + 9 = 0$

C'est une équation de degré 2

$\Delta = 100 - 4 \times 9 = 64$

Il y a deux racines réelles

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-10-8}{2} = -9 \\ z_2 = \frac{-10+8}{2} = -1 \end{cases}$$

2°) $z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$

Il y a deux racines complexes:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3°) $\frac{z-1}{z+1} = 1+2i$

$\Leftrightarrow z-1 = (1+2i)(z+1) \quad (z \neq -1)$

$\Leftrightarrow z-1 = z+1+2iz+2i \quad (z \neq -1)$

$$\Leftrightarrow z - 2z - iz = -2 - i - 1 \quad (z \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow (-1 - i)z = -3 - i \quad (z \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3-i}{-1-i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(-3-i)(-1+i)}{1^2 + 1^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3 - 3i + i + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = 2 - i}$$

2 pts

$$\Leftrightarrow -2iz = 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2+2i}{-2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+i}{-i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+i)(+i)}{1}$$

$$\Leftrightarrow z = +i - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = -1 + i}$$

$$4^o) z^2 - 16 = -10z - 25$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 10z + 9 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4 \times 9 = 64$$

Il y a deux racines réelles

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-10-8}{2} = -9 \\ z_2 = \frac{-10+8}{2} = -1 \end{cases}$$

1 pt

$$4^o) z^2 = 18z - 56$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 56 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 56 = 100$$

Il y a deux racines réelles

$$\begin{cases} z_1 = \frac{18-10}{2} = 4 \\ z_2 = \frac{18+10}{2} = \frac{28}{2} = 14 \end{cases}$$