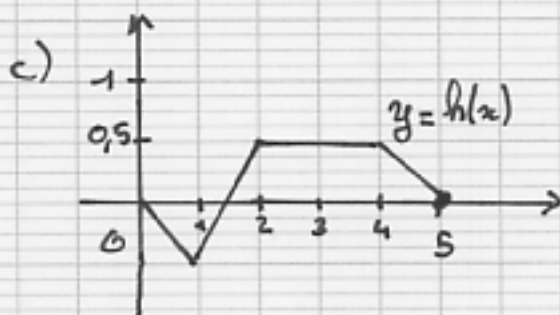
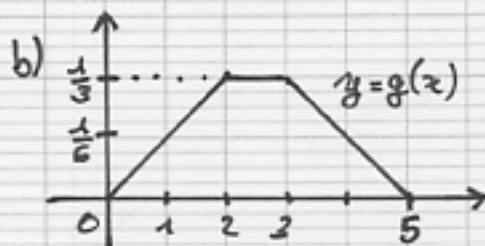
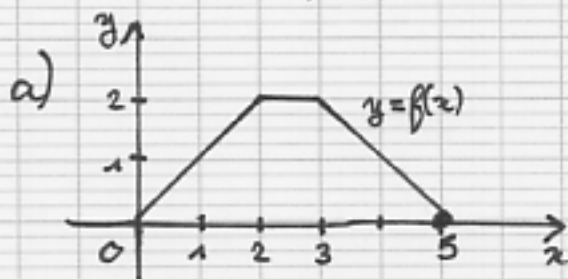


Devoir n°13 (lois à densités)

Exercice 1: 1°) Parmi les fonctions suivantes, cite laquelle représente une densité de probabilité sur $[0; 5]$.



2°) En utilisant la densité trouvée en 1°)
calculer: $P(X \leq 2)$ où X suit la densité continue de densité du 1°)

Exercice 2: Soit X une v.a. à valeurs dans $I = [0; 1]$ dont la loi de probabilité a pour densité: $f(x) = 4x^3$ sur $[0; 1]$.
1°) Vérifier que f définit bien une loi de probabilité.
2°) Calculer $P(0,3 \leq X \leq 0,6)$

Exercice 3: Soit X une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10$.

- 1°) Calculer $P(0 \leq X \leq 10)$
- 2°) Déterminer $P(X \geq 10)$
- 3°) Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 4: Soit X une v.a. suivant la loi normale $N(0, 1)$.
A la calculatrice, calculer :

a) $P(X \leq 0,43)$ b) $P(-1 \leq X \leq 1)$ c) $P(X > 1)$

Exercice 5 : Soit X une v.a. suivant la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ avec $m = 80$ et $\sigma = 5$.

- a) Calculer $P(X \leq 84)$, $P(75 \leq X \leq 85)$
b) Trouver le réel k tel que $P(X \leq k) = 0,35$.

Exercice 6 : On lance 3600 fois un dé équilibré. On souhaite évaluer la probabilité que le nombre d'apparition du 6 soit compris strictement entre 575 et 650.

On note X la v.a. égale au nombre d'apparitions du 6 lors des 3600 lancers.

- 1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
- 2°) En utilisant la calculatrice, calculer $P(575 < X < 650)$.
- 3°) Quel théorème permet d'approcher la loi de X par une loi normale? Donner les paramètres de cette loi normale.
- 4°) Avec cette approximation, recalculer $P(575 < X < 650)$.

Exercice 1: 1°) C'est la fonction g car c'est la seule qui est positive telle que l'aire totale sous la courbe soit 1. (1)

2°) $P(X \leq 2) = \text{aire du triangle}(ONB) = \frac{1}{2} \text{ base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X \leq 2) = \frac{1}{3}$ (1)

Exercice 2: 1°) * la fonction est positive sur $[0, 1]$ car $f(x) = 4x^3$ pour $x \in [0, 1]$
* l'aire sous la courbe (sur $[0, 1]$) vaut:

$$\int_0^1 4x^3 dx = \left[\frac{4x^4}{4} \right]_0^1 = \left[x^4 \right]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1$$

Donc c'est bien une fonction densité sur $[0, 1]$

2°) $P(0,3 \leq X \leq 0,6) = \int_{0,3}^{0,6} 4x^3 dx = \left[x^4 \right]_{0,3}^{0,6} = 0,6^4 - 0,3^4 = 0,1215$ (1,5)

Exercice 3: 1°) La densité sur $[0, +\infty[$ de cette loi exponentielle est: $f(x) = 10e^{-10x}$

Donc $P(0 \leq X \leq 10) = \int_0^{10} 10e^{-10x} dx = \left[-e^{-10x} \right]_0^{10} = -e^{-100} + 1 \approx 1$ (1)

2°) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(0 \leq X < 10) = 1 - (-e^{-100} + 1) = e^{-100} \approx 3,72 \cdot 10^{-44}$ (1)

3°) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0,1$ (1)

↑ voir cours sur les lois exponentielles

Exercice 4: avec la calculatrice on obtient:

a) $P(X \leq 0,43) \approx 0,6664$ (1)

b) $P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6827$ (1)

c) $P(X \geq 1) \approx 0,1587$ (1)

Exercice 5: a) $P(X \leq 84) = 0,7881$ (1)

$P(75 \leq X \leq 85) = 0,6827$ (1)

b) Le réel k tel que $P(X \leq k) = 0,35$ est: 78,07 (2)

Exercice 6: 1°) X indique le nombre de "6" obtenus au bout de 3600 lancers.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n=3600; p=\frac{1}{6})$ (1)

2°) A la calculatrice: $P(575 \leq X \leq 650) = P(X \leq 649) - P(X \leq 575) = 0,8495$ (1)

3°) C'est le théorème de Moivre-Laplace: $m = np = 600$; $\sigma = \sqrt{npq} = 22,36$ (2)

4°) On obtient avec la loi normale: $P(575 \leq X \leq 650) = 0,8556$ (1)