TSS I

Devoir n° 18 (1 heure)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$.

A tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2 OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   a) Déterminer la forme algébrique de Z_M

   b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$

   c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique. Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$

   a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

   b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

   c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

   d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

   e) Montrer que BM' = 2 OI.

1°) $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a) $z_M = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{z_M = 1 - i\sqrt{3}}$ 2

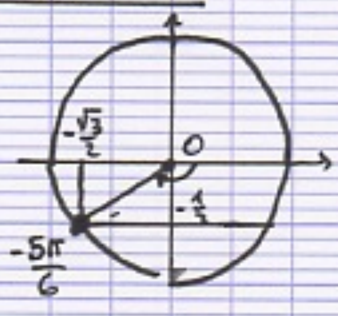
b) $z_{M'} = -i z_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i - \sqrt{3}$

Donc $\boxed{z_{M'} = -\sqrt{3} - i}$ 2

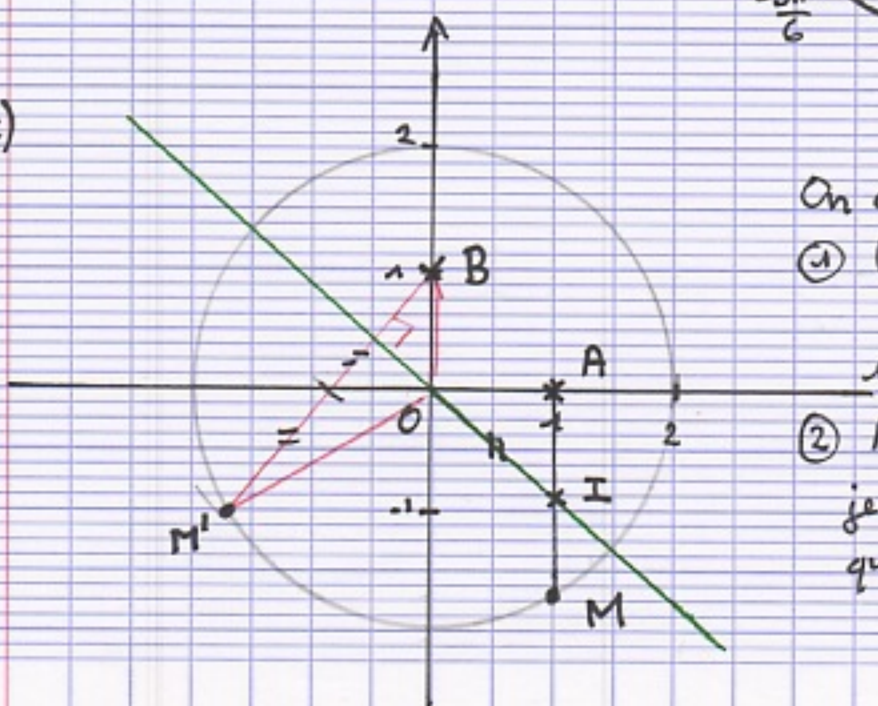
module de $z_{M'}$: $\boxed{|z_{M'}| = \sqrt{3+1} = 2}$

argument de $z_{M'}$: On note $\theta' = \arg(z_{M'})$

$\begin{cases} \cos(\theta') = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta') = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{\theta' = -\frac{5\pi}{6} \ (2\pi)}$ 3



c)



On constate que :

① (OI) ⊥ (BM')

donc (OI) est bien une hauteur de OBM'.

② A l'aide du compas je remarque aussi que 2OI = BM'

2

2°) Cas général : $z_M = x + iy$ (avec $y \neq 0$)

a) I est le milieu de [AM]
donc :

$$z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{1 + x + iy}{2}$$

$$\boxed{z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}}$$

2

b) $z_{M'} = -i z_M = -i(x+iy) = -ix + y$

Donc $\boxed{z_{M'} = y - ix}$

2

c) On a : $z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}$ donc $I\left(\frac{1+x}{2} ; \frac{y}{2}\right)$

$z_B = i$ donc $B(0 ; 1)$

$z_{M'} = y - ix$ donc $M'(y ; -x)$ 3

d) On a : $\vec{OI}\begin{pmatrix} \frac{1+x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{BM'}\begin{pmatrix} y \\ -x-1 \end{pmatrix}$

2

Donc $\vec{OI} \cdot \vec{BM'} = \left(\frac{1+x}{2}\right)y + \frac{y}{2}(-x-1) = \frac{y}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{yx}{2} - \frac{y}{2} = 0$

Donc $(OI) \perp (BM')$: (OI) est donc une hauteur de OBM'

e) D'après les coordonnées des vecteurs : $OI^2 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

$$= \frac{(1+x)^2 + y^2}{4}$$

de même : $BM'^2 = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (x+1)^2$

On constate donc que $4OI^2 = BM'^2$

C'est à dire $\boxed{2OI = BM'}$ (car les longueurs sont positives)

2