Devoir n°14.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Correction du devoir.

Partie A

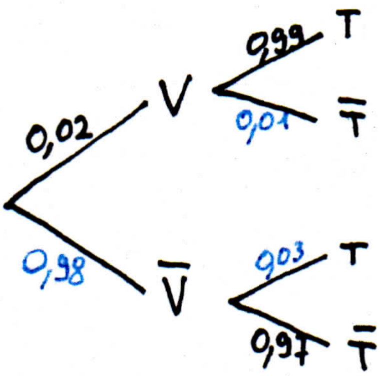
1°) a) D'après l'énoncé : $\boxed{P(V) = 0,02}$ (2% de la population est contaminée par le virus)

$\boxed{P_V(T) = 0,99}$ (La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99)

$\boxed{P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97}$ (La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97)

1,5pts

Faisons un arbre qui traduit cette situation :



Cette branche correspond à l'événement $V \cap T$

1,5pts

b) D'après l'arbre précédent, on en déduit :

$$P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = \boxed{0,0198}$$

3pts

2°) La probabilité que le teste soit positif est, d'après la formule des probabilité totale :

$$P(T) = P_V(T) \times P(V) + P_{\bar{V}}(T) \times P(\bar{V})$$
$$= 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98$$

$$\boxed{P(T) = 0,0492}$$

2pts

3°) a) Dans cette question, on veut montrer que : $P_T(V) \approx 0{,}40$

Or $P_T(V) = \dfrac{P(T\cap V)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} = \dfrac{198}{492} = \dfrac{33}{82} \approx \underline{\underline{0{,}4024}}$ 2pts

Il y a bien 40% de chances que la personne soit contaminée lorsque le test est positif.

b) On cherche : $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{T}\cap\overline{V})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}98\times 0{,}97}{1-P(T)}$

$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{0{,}9506}{1-0{,}0492} \approx \underline{\underline{0{,}9998}}$ arrondi à 10^{-4} près

2pts

Partie B

1°) On est en présence d'un schéma de Bernoulli. En effet on répète 10 fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli :

SUCCÈS = "La personne est contaminée par le virus"

ECHEC = " ——— n'est pas contaminée ——— "

D'après l'énoncé, la probabilité du succès est 0,02.

Comme X indique le nombre de succès parmi ces 10 expériences aléatoires, on sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=10\,;\,p=0{,}02)$

3pts (explications)

2 points (paramètres)

2°) On cherche $P(X\geqslant 2)$.

on peut aussi utiliser la calculatrice : 1- binomcdf(10,0,02, 1)

$P(X\geqslant 2) = 1-P(X<2) = 1-P(X\leqslant 1) = 1-\big(P(X=0)+P(X=1)\big)$

$= 1-\left(\binom{10}{0}p^0q^{10}+\binom{10}{1}pq^9\right) = 1-\left(0{,}98^{10}+10\times 0{,}02\times 0{,}98^9\right)$

$= 0{,}0162$ arrondi à 10^{-4} près.

3pts