Travaux dirigés | **BTS** | $1^{\text{ère}}$ année.

COMPLEXES

Exercice n° 1 **Sommes et produits dans $\mathbb{C}$:**

- Soit les nombres complexes, $z = 4 - 2i$ et $z' = -2 - 5i$, mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

$z + z'$ $\quad 2z - 4z'$ $\quad z \times z'$ $\quad z'^2$ $\quad z^3$ $\quad (-2 - z)(3 - 4z')$

- Développer et mettre sous la forme algébrique $a + ib$ les nombres complexes :

$(3 + i)^2$ $\quad (-4 - i)^2$ $\quad (4 - 2i)(4 + 2i)$

- On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

z^2 $\quad z^3$ $\quad z^4$ $\quad 1 + z + z^2$ $\quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

Exercice n° 2 **Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$**

- Soit les nombres complexes, $z = 2 - 5i$ et $z' = -1 - 2i$, mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

$\frac{1}{z}$ $\quad \frac{-2}{z}$ $\quad \frac{z}{z'}$ $\quad \frac{1+z}{1-z'}$

- Mettre sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

$\frac{1}{1-i}$ $\quad -i + \frac{1}{2i}$ $\quad \frac{1-3i}{2+i}$ $\quad \left(\frac{1-3i}{2+i}\right)^2$ $\quad \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

Exercice n° 3 **Conjugué**

- Calculer le conjugué du nombre complexe $z = \frac{(2-i)(1+i)}{2i(5+3i)}$.

- On considère les nombres complexes $z_1 = i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.

b) Calculer $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 . z_2}$ sous forme algébrique.

Soit z et z' deux complexes de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$

c) Montrer que $z\bar{z} = 1$ et $z'\bar{z}' = 1$

d) Soit $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$. Ecrire $\bar{u}$ en fonction de $\bar{z}$ et $\bar{z}'$

e) Calculer $u - \bar{u}$. En déduire que u est réel.

Exercice n° 4 **Module et argument**

- Calculer le module et l'argument des complexes suivants :

$1 + i$ $\quad 2 - 2i$ $\quad \sqrt{3} - i$ $\quad -7i$ $\quad -4$

$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad 36 . \left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$1 + i\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

Exercice n° 5 Problème I

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$.

a) Mettre z_1^3 sous la forme algébrique
b) Mettre Z sous la forme algébrique.
c) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_1^3.
d) Déterminer le module et un argument de z_2 .
e) Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z.
f) En comparant les écritures algébriques et trigonométriques de Z, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et de $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice n° 6 Problème II

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$
2) Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal d'unité graphique 1 cm. On appelle A le point d'affixe $z_1 = -1 - i$ et B le point d'affixe $z_2 = -1 + i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des complexes z_1, z_2 et $z_2 - z_1$.

b) Calculer le module et un argument du complexe $\frac{z_2}{z_1}$. Ecrire $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique.

c) Déduire du a) les distances OA, OB et AB. Déterminer la nature du triangle AOB. Justifier la réponse.