Les nombres complexes

1ère partie : Forme algébrique, opérations et équations

FORME ALGÉBRIQUE ET OPÉRATIONS

Exercice 1

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -2i + 5$; $z_2 = 15$; $z_3 = 3i$;
$z_4 = i(2 + 3i)$; $z_5 = (1 - 5i)^2$.

Exercice 2

Déterminer les réels x et y pour que l'on ait :

$$(2 - i)x + (2 - 3i)y = 2ix + (1 + i)y + 2i$$

Exercice 3

1. Écrire sous forme algébrique :
   $z = x + 2 + i(-ix + 2x) + 2i - 5ix$ avec x réel.
2. À quelle condition sur x, z est-il réel ?
3. À quelle condition sur x, z est-il imaginaire pur ?

Exercice 4

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$; $z_2 = (3 - 11i) - (-8 + 9i)$;
$z_3 = (7 + 5i)(-4 + 3i)$; $z_4 = (2 + 3i)^2$;
$z_5 = i(1 - 3i)^2$; $z_6 = 1 + i + i^2$.

Exercice 5

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (2 + i) - (4 - 2i)$;
$z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$;
$z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$;

$$z_4 = \frac{1}{4 - i} \; ; \qquad z_5 = \frac{1 - 5i}{2 + 3i} \; .$$

Exercice 6

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (3 + i)(4 - 2i)$; $z_2 = (3 - i)^2$;
$z_3 = (2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3})$.

Exercice 7

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (1 + i)(4 - 3i)(1 - i)$;
$z_2 = (3 + i)^2(3 - 2i)$.

Exercice 8

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2}{1 + i} \; ; \qquad z_2 = \frac{1}{3 - i\sqrt{2}} \; ; \qquad z_3 = \frac{1}{i\sqrt{2} - 3}.$$

Exercice 9

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2 - 5i}{3 + 2i} \; ; \qquad z_2 = \frac{6 + 3i}{1 - 2i} \; ; \qquad z_3 = \frac{3i}{3 + 4i}.$$

Exercice 10

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2}{1 - 2i} + \frac{3}{1 + 2i}; \qquad z_2 = 2i - \frac{3}{2 - i}.$$

CONJUGUÉS ET PROPRIÉTÉS

Exercice 11

Donner une forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ du complexe z dans chacun des cas suivants.

$$z_1 = 2 + 5i \; ; \qquad z_2 = \frac{1}{i + 2} \; ; \qquad z_3 = \frac{2 - i}{2i + 1} \; ;$$
$$z_4 = (3 - 2i)(i + 1); \qquad z_5 = \frac{i(3 - 2i)}{2i + 1}.$$

Exercice 12

$$z_1 = \frac{2i + 1}{i + 2} \quad ; \quad z_2 = \frac{1 - 2i}{2 - i}$$

1. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ imaginaire pur ?
2. Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 13

Écrire en fonction de $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe Z dans chacun des cas suivants :

$$Z_1 = -2i + 3z \quad ; \qquad Z_2 = 3 - 2i - 2iz \quad ;$$
$$Z_3 = (2 - iz)(2z - 4 + 3i) \quad ; \qquad Z_4 = \frac{2i + 1 - iz}{5i + 2z}.$$

ÉQUATIONS

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. (On donnera les solutions sous forme algébrique)

a) $iz = 3 + i$
b) $(2 - i)z - 2i = iz + 2 - 3i$
c) $(2iz + i)(4z - 8 - 4i) = 0$
d) $\frac{z-2i}{z+2} = 4i$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. (On donnera les solutions sous forme algébrique)

a) $4\bar{z} + 2i - 4 = 0$
b) $(iz - 2 + i)(2i\bar{z} + i - 2) = 0$
c) $2z + i\bar{z} = 4$
d) $2iz - \bar{z} = 4i$

Exercice 17
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z.

- ***a)*** $2z^2 - 6z + 5 = 0$
- ***b)*** $z^2 - 5z + 9 = 0$
- ***c)*** $z^2 + z + 1 = 0$
- ***d)*** $z^2 - 2z + 3 = 0$
- ***e)*** $z^2 = z + 1$
- ***f)*** $z^2 + 3 = 0$
- ***g)*** $z^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)z + \sqrt{3} = 0$
- ***h)*** $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
- ***i)*** $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$

Exercice 18
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z.

$$\frac{z-3}{z-2} = z \quad ; \quad \frac{3z+2}{z+1} = z + 3$$

Exercice 19
On pose $P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i$.

1. Calculer $P(-1-i)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z + 1 + i)\,(z^2 + az + b)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 20
On pose $P(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $P(i) = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z :
$P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

POUR ALLER PLUS LOIN …

Exercice 21 : Racine carrée d'un complexe
L'objectif de cet exercice est de trouver z tel que :

$$z^2 = 5 - 12i$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X - 36 = 0$
2. En déduire les solutions réelles de l'équation
$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

3. On considère dans $\mathbb{C}$,
l'équation $(E) : z^2 = 5 - 12i$.

- ***a.*** Montrer que cette équation équivaut à :
$$(S) : \begin{cases} z = x + iy \\ x^2 - y^2 = 5 \text{ avec } x \text{ et } y \text{ réels} \\ xy = -6 \end{cases}$$
- ***b.*** Démontrer que le couple de réels $(x\,;y)$ est solution de : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$
si et seulement si il est solution de :
$$(S') : \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -\dfrac{6}{x} \end{cases}$$
- ***c.*** En déduire les solutions de (S'), puis celles de (S).
- ***d.*** Conclure sur les solutions de (E).

Remarque *: Ces solutions sont appelées racines carrées de* $5 - 12i$.