Classe: TS2ET	Date: 17/02/2014	**Type**
Devoir n°7		**Devoir en classe**
Thème: Loi binomiale et de Poisson		

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n=9;p=0,2)$.

1°) Donnez E(X) et V(X).

2°) Calculez :

a) $P(X=0)$, b) $P(X=3)$, c) $P(X\leqslant 1)$, d) $P(X\leqslant 7)$.

Exercice 2

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera arrondie à 10^{-3} .

Une petite entreprise emploie vingt personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) E_1 : « un jour donné il y a exactement trois absents ».

b) E_2 : « un jour donné il y a strictement plus de deux absents ».

c) E_3 : « un jour donné le nombre d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises) ».

3) Calculer l'espérance mathématique notée E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X).

4) On approche la loi binomiale du 1) par une loi de Poisson .

a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson

b) Déterminer en utilisant cette approximation, les probabilités des trois événements E_1 , E_2 et E_3 de la question 2).

c) Vérifier que les résultats obtenus au 4) b) différent de moins de 1 % des résultats obtenus au 2).

Correction du devoir

Exercice 1 :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=9\,;\,p=0{,}2)$

1°) $E(X) = np = 9 \times 0{,}2 = 1{,}8$ (1)

$V(X) = npq = 9 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 1{,}44$ (1)

2°) a) $P(X=0) = C_9^0 p^0 q^9 = 1 \times 1 \times 0{,}8^9 \simeq \underline{0{,}134}$ (1)

b) $P(X=3) = C_9^3 p^3 q^6 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^6 = 84 \times 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^6 \simeq \underline{0{,}176}$ (1)

c) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}8^9 + C_9^1 p^1 q^8 = 0{,}8^9 + 9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8$

$\simeq \underline{0{,}436}$ (1,5)

d) $P(X \leq 7) = 1 - P(X>7) = 1 - (P(X=8) + P(X=9))$

$= 1 - (C_9^8 p^8 q + C_9^9 p^9 q^0)$

$= 1 - (9 \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}2^9 \cdot 1)$

$\simeq \underline{0{,}99998}$ (1,5)

Exercice 2

1°) On est en présence d'un schéma de Bernoulli. En effet, on répète 20 fois (1 fois pour chaque employé) l'expérience de Bernoulli suivante : SUCCÈS : "l'employé est absent" de probabilité $p = 0{,}05$

ECHEC : "l'employé n'est pas absent". (1)

La variable aléatoire X qui indique le nombre de succès suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n=20\,;\,p=0{,}05)$ (1)

2°) a) $P(E_1) = P(X=3) = C_{20}^3 \cdot p^3 \cdot q^{17} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{17}$

$\boxed{P(E_1) = 0{,}060}$ (arrondie à 10^{-3} : $\simeq 0{,}05958$) (1)

b) $P(E_2) = P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 1 - (C_{20}^0 p^0 q^{20} + C_{20}^1 p^1 q^{19} + C_{20}^2 p^2 q^{18})$

$= 1 - (0{,}95^{20} + 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} + 190 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18})$

$= 0{,}075$ arrondie à 10^{-3} près $(0{,}0754836)$

$\boxed{P(E_2) = 0{,}075}$ arrondie à 10^{-3} près 1

c) $P(E_3) = P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$

$\boxed{P(E_3) \simeq 0{,}075}$ (avec calculatrice) 2

3°) . $E(X) = np = 20 \times 0{,}05 = 1$ 1

. Cela signifie qu'en moyenne il y aura 1 absent un jour donné. 1

4°) a) On sait que l'on prend $\lambda = np = 1$ 1

b) Dans le cas où X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ on aura :

$P(E_1) = P(X=3) = \underline{0{,}061}$ (voir formulaire) 1

$$P(E_2) = P(X>2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - (0{,}368 + 0{,}368 + 0{,}184) \quad \text{(formulaire)}$$
$$= \underline{0{,}08}$$
1

$$P(E_3) = P(3 \leq X \leq 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$
$$= 0{,}061 + 0{,}015 + 0{,}003 + 0{,}001 \quad \text{(formulaire)}$$
$$= \underline{0{,}08}$$
1

c) Pour E_1 : $\dfrac{0{,}061 - 0{,}060}{0{,}060} = 0{,}017 = 1{,}7\,\%$

Pour E_2 : $\dfrac{0{,}08 - 0{,}075}{0{,}075} = 0{,}067 \simeq 6{,}7\,\%$ 1

Pour E_3 : idem à E_2 : $6{,}7\%$