Classe: TS1ET	Date: 16/01/2014	**Type**
Devoir n°7		**Devoir surveillé**
Thème: Variations de fonctions		

Exercice 1 :

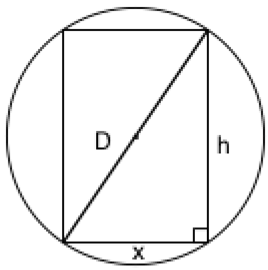
Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$.

1°) Déterminer les limites en ±∞ de f.

2°) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f.

Exercice 2 :

Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre obtenue la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire carrée, mais toujours plus haute que large. Si la base est x et la hauteur h, on montre en mécanique que la résistance est d'autant plus grande que $x.h^2$ est grand.



On suppose que les lettres D, x, h désignent des longueurs exprimées en décimètre et que D=3.

Partie A: Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur [0;3] par $f(x)=-x^3+9x$ et soit (*C*) sa courbe représentative.

1°) Déterminer la dérivée f' de f.

2°) Étudier les variations de f et construire le tableau des variations de f.

3°) Écrire une équation de la tangente T_1 à (*C*) au point d'abscisse 0.

Partie B: Application au problème.

1°) Expliquer pourquoi : $x^2+h^2=9$.

2°) Calculer $x.h^2$ en fonction de x.

2°) En utilisant la partie A de ce problème, trouver x et h de façon que la poutre ait le maximum de résistance à la flexion.

Correction du devoir

Exercice 1

1°) En $\pm\infty$ un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré, nous avons donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3) = +\infty$$

et $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3) = -\infty$$

2pts

2°) Les variations de f sont données par le signe de f'.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$$

donc $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 36 = 6x^2 + 6x - 36$

$$\boxed{f'(x) = 6(x^2 + x - 6)}$$

1pt

$f'(x)$ est donc du signe de $x^2 + x - 6$ qui est un polynôme de degré 2, donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

1pt

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	82	$\searrow$	-43	$\nearrow$	$+\infty$

3pts

$f(-3) = 82$ $\quad$ $f(2) = -43$

Exercice 2

Partie A : $f(x) = -x^3 + 9x$ définie sur $[0;3]$

1°) $f'(x) = -3x^2 + 9$ (2pts)

2°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.
Or $f'(x)$ est un polynômes de degré 2, il est donc du signe de $a = -3$ sauf entre les racines : (1pt)

Recherche des racines (je ne calcule pas le discriminant)

$$-3x^2 + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow +3x^2 = +9$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

(1pt)

D'où le tableau des variations de f. entre les racines

x	0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$
$f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^3 + 9\sqrt{3}$
$= -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{3} \simeq 10{,}39$
$f(3) = -27 + 27 = 0$

(2pts)

3°) Une équation de T_1 s'écrit : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

or $f'(0) = 9$ et $f(0) = 0$

T_1 a donc pour équation : $\boxed{y = 9x}$

(2pts)

Partie B :

1°) D'après la figure de l'énoncé, le triangle est rectangle.
On applique le théorème de Pythagore et on obtient :

$$x^2 + h^2 = D^2 \quad \text{avec } D = 3$$

Donc $\boxed{x^2 + h^2 = 9}$

(2pts)

2°) D'après 1°) $x^2+h^2=9$ donc $h^2=9-x^2$

Ainsi $x.h^2 = x(9-x^2) = 9x - x^3 = -x^3+9x$ 1pt.

Je constate que c'est $f(x)$

3°) La poutre a le maximum de résistance lorsque xh^2 est le plus grand possible.

Or d'après B2°, $xh^2 = f(x)$.

Donc la résistance à la flexion est maximale lorsque $f(x)$ est maximale. Or d'après l'étude de la partie A, ceci est le cas pour $x=\sqrt{3}$ (voir tableau des variations)

Or $x^2+h^2=9$. Donc si $x=\sqrt{3}$, $3+h^2=9$

$h^2=6$

$h=\sqrt{6}$

<u>Conclusion</u>: La poutre a la résistance maximale à la flexion pour :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \simeq 1{,}73 \text{ dm} \simeq 17{,}3 \text{ cm} \\ h &= \sqrt{6} \simeq 2{,}45 \text{ dm} \simeq 24{,}5 \text{ cm} \end{aligned}}$$ 2pts