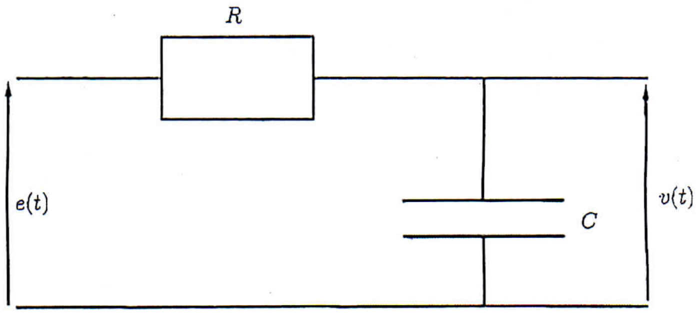
Devoir n°6 (DS - TS$_2$ ET - 11/12/13)

Un circuit électrique comporte, en série, une résistance R et un condensateur de capacité C.



Le circuit est alimenté par une tension « source » représentée par une fonction e. La tension aux bornes du condensateur est représentée par une fonction v. Si on considère cette tension comme signal de « sortie », le circuit joue le rôle de filtre passe-bas.

On notera $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Partie A

Les fonctions e et v vérifient l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ suivante :

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t).$$

De plus, on suppose que $v(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul. En particulier, on a $v(0) = 0$.

On admet que les fonctions e et v possèdent des transformées de Laplace, notées respectivement E et V.

1. La tension e appliquée en entrée au circuit est telle que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = 10\,\mathcal{U}(t).$$

   (a) Tracer sur la copie une représentation graphique de la fonction e.

   (b) Exprimer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, montrer que :

$$V(p) = \frac{10}{p(RCp+1)}.$$

3. (a) Vérifier que

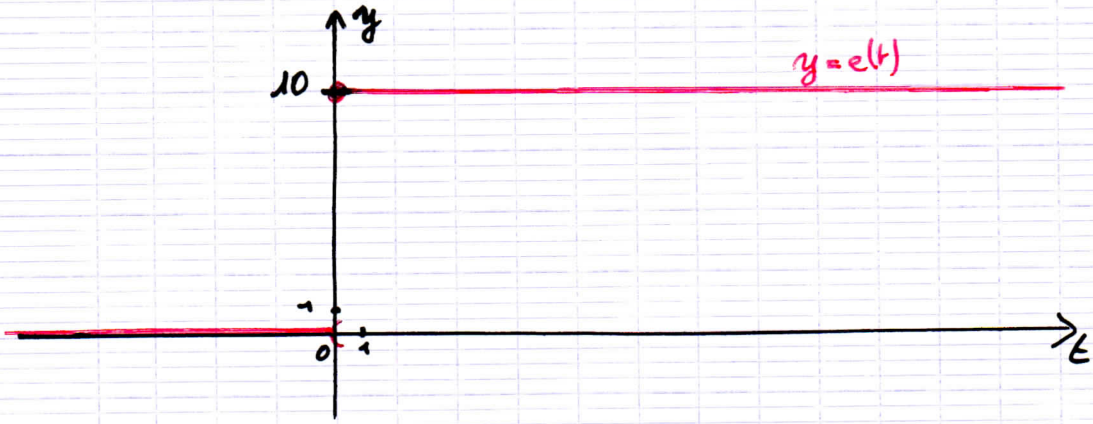
$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}.$$

   (b) En déduire l'expression de $v(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul en fonction de t, R et C.

Corrigé du devoir

1°) (a) $e(t) = 10\,U(t)$

La représentation graphique est la suivante :



2pts

1°) (b) $E(p) = \mathcal{L}(10\,U(t)) = 10 \times \dfrac{1}{p}$ $\boxed{E(p) = \dfrac{10}{p}}$

2pts

2°) On a : $RC\,v'(t) + v(t) = e(t)$ (c'est l'équation différentielle (E))

Donc en appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

$$RC\,\mathcal{L}(v'(t)) + \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(e(t))$$

$$\Rightarrow RC\left(pV(p) - v(0^+)\right) + V(p) = E(p)$$

$$\Rightarrow RC\,p\,V(p) + V(p) = \frac{10}{p} \quad \text{car } v(0^+) = 0 \text{ et } E(p) = \frac{10}{p}$$

$$\Rightarrow (RCp + 1)\,V(p) = \frac{10}{p}$$

donc $\boxed{V(p) = \dfrac{10}{p(RCp+1)}}$

2pts

3°) (a) On a : $\dfrac{10}{p} - \dfrac{10}{p + \frac{1}{RC}} = \dfrac{10}{p} - \dfrac{RC \times 10}{RCp + 1}$

$$= \frac{10(RCp+1) - RCp \times 10}{p(RCp+1)}$$

$$= \frac{\cancel{10RCp} + 10 - \cancel{10RCp}}{p(RCp+1)} = \frac{10}{p(RCp+1)} = V(p)$$

On a donc bien : $V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+\frac{1}{RC}}$ 2pts

3 (b)

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+\frac{1}{RC}}$$

Donc $v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p+\frac{1}{RC}}\right)$

$$= 10\,U(t) - 10\,e^{-\frac{1}{RC}t}\,U(t)$$

$$\boxed{v(t) = \left(10 - 10e^{-\frac{t}{RC}}\right)U(t)}$$

2pts