Classe: TS2ET	Date: 18/11/2013	**Type**
Devoir n°4		**Devoir surveillé**
Thème: Equations différentielles et transformée de Laplace.		

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-3y'-4y=-5e^{-x}$
où y est une fonction de sa variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y''-3y'-4y=0$.
2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^{-x}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4°) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : f(0)=2 et f'(0)=-1

Exercice 2

1°) A l'aide du formulaire, déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes:

a) $f(t)=(t^2-7t).U(t)$.

b) $f(t)=(\cos(4t)-3\sin(2t)).U(t)$.

c) $f(t)=t^2e^{-t}.U(t)$.

d) $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)U\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$.

2°) Retrouver les originaux des fonctions suivantes.

a) $F(p)=\frac{1}{p}$.

b) $F(p)=\frac{1}{p}e^{-2p}$

c) $F(p)=\frac{1}{(p+3)^2}$

d) $F(p)=\frac{p}{(p+1)^2+4}$

Correction du devoir

Exercice 1 :

1°) $y'' - 3y' - 4y = 0$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, sans second membre.

Son équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \times 4 = 25$$

Il y a deux racines réelles :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \\ r_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

D'après le formulaire, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{y_0(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x}} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

3

2°) $h(x) = x e^{-x}$

donc $h'(x) = 1 e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}$

$h''(x) = -1 e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = (x-2) e^{-x}$

Nous avons donc : $h''(x) - 3h'(x) - 4h(x)$

$= (x-2)e^{-x} - 3(1-x)e^{-x} - 4xe^{-x}$

$= \left((x-2) - 3 + 3x - 4x\right) e^{-x}$

$= -5 e^{-x}$

1 : pour savoir ce qu'il faut faire.

Donc h est bien une solution de (E)

3

3°) D'après le cours, les solutions de (E) s'écrivent :

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + x e^{-x}} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

2

4°) f est une solution, donc $f(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + x e^{-x}$

donc $f'(x) = -\lambda e^{-x} + 4\mu e^{4x} + (1-x)e^{-x}$

Ainsi :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda + 4\mu + 1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda + 4\mu = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{f(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} = (x+2)e^{-x}}$ 3

<u>Exercice 2</u>

1°) a) $f(t) = t^2.U(t) - 7tU(t)$ donc $\boxed{F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{7}{p^2}}$ 1

b) $f(t) = (\cos(4t) - 3\sin(2t))U(t)$ donc $\boxed{F(p) = \frac{p}{p^2+16} - \frac{6}{p^2+4}}$ 1

c) $f(t) = t^2 e^{-t} U(t)$ donc $\boxed{F(p) = \frac{2!}{(p+1)^3} = \frac{2}{(p+1)^3}}$ 1

d) $f(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) U\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{F(p) = \frac{p}{p^2+1} e^{-\frac{\pi}{6}p}}$ 1

2°) a) $F(p) = \frac{1}{p}$ donc $\boxed{f(t) = U(t)}$ 1

b) $F(p) = \frac{1}{p}e^{-2p}$ donc $\boxed{f(t) = U(t-2)}$ 1

c) $F(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$ donc $f(t) = tU(t).e^{-3t} = \boxed{te^{-3t}U(t)}$ 1

d) $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2+4} = \dfrac{p+1-1}{(p+1)^2+4}$

$F(p) = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+4} - \dfrac{1}{(p+1)^2+4}$

$F(p) = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+4} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{(p+1)^2+4}$

Donc $f(t) = \cos(2t)\,e^{-t}\,U(t) - \dfrac{1}{2}\sin(2t)\,e^{-t}\,U(t)$

$$\boxed{f(t) = \left[\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]e^{-t}\,U(t).}$$

2