Classe: TS2ET	Date: 16/10/2013	**Type**
Devoir n°3		**Devoir surveillé**
Thème: Equations différentielles et transformée de Laplace.		

Exercice 1(7 points)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction *y* de la variable réelle *t,* solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad (1)$$

On lui associe l'équation différentielle sans second membre suivante :

$$y''(t)+4y(t)=0 \qquad (2)$$

1°) Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (1).

2°) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (2).

3°) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).

4°) En déduire l'expression de la fonction *f* solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Exercice 2(6 points)

On considère l'équation différentielle (E): $y''-5y'+6y=(2x^2-2x+2)e^x$

où *y* est une fonction de la variable réelle *x,* définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de *y* et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y''-5y'+6y=0$

2°) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x^2+2x+3)e^x$ est une solution particulière de l'équation (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 3(7 points)

A-Calculer les transformées de Laplace des signaux suivants :

1°) $f(t)=(t^2-2t+3)U(t)$ 3°) $f(t)=(t-1)U(t-1)$

2°) $f(t)=\cos(3t)U(t)$ 4°) $f(t)=5e^{-2t}\sin(3t)U(t)$

B- Retrouver les originaux des fonctions suivantes.

1°) $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$ 3°) $F(p)=\frac{1}{p}e^{-p}$ 5°) $F(p)=\frac{1}{p^2+4}$

2°) $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p+1}$ 4°) $F(p)=\frac{1}{(p+1)^2}$ 6°) $F(p)=\frac{p}{(p+2)^2+4}$

Corrigé du devoir

Exercice 1 (7pts)

1°) Si $h(t) = k$ (constante) est solution alors : $4k = 20$

Donc $k = 5$.

La constante 5 est solution particulière de (1) ①

2°) L'équation différentielle (2) est du second ordre, son équation caractéristique est :

$$r^2 + 4 = 0$$

Les deux solutions sont $r_1 = -2i$ et $r_2 = 2i$ $(\alpha = 0 ; \beta = 2)$

D'après le formulaire, les solutions s'écrivent :

$$y_0(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$ ③

3°) La solution générale de (1) est la somme des deux solutions précédentes :

$$\boxed{y(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) + 5} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$ ①

4°) f est une solution, donc $f(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) + 5$

- Comme $f(0) = 0$ donc $\lambda + 5 = 0$ donc $\boxed{\lambda = -5}$
- $f'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$

  Comme $f'(0) = 0$ donc $2\mu = 0$ donc $\boxed{\mu = 0}$

conclusion : $\boxed{f(t) = -5\cos(2t) + 5}$ ②

Exercice 2 : (6pts)

1°) L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - 5r + 6 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$$

Il y a deux solutions réelles :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ r_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

D'après le formulaire, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{y_0(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

(2pts)

2°) $g(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$

$g'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+3)e^x = (x^2 + 4x + 5)e^x$

$g''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+5)e^x = (x^2+6x+9)e^x$

Donc $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x)$

$= \left[(x^2+6x+9) - 5(x^2+4x+5) + 6(x^2+2x+3)\right]e^x$

$= (2x^2 + 6x - 20x + 12x + 9 - 25 + 18)e^x$

$= (2x^2 - 2x + 2)e^x$

Donc $g(x)$ est bien solution de (E_0).

(3pts)

3°) La solution générale de (E) s'écrit donc :

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + (x^2 + 2x + 3)e^x}$$

(1pt)

Exercice 3 (7pts)

(A) 1°) $f(t) = t^2 U(t) - 2t\,U(t) + 3U(t)$

$F(p) = \frac{2!}{p^3} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}$ $\boxed{F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}}$ (0,5)

2°) $f(t) = \cos(3t)U(t)$

donc $\boxed{F(p) = \frac{p}{p^2 + 9}}$ (0,5)

3°) $f(t) = (t-1)\,U(t-1)$ donc $\boxed{F(p) = \frac{1}{p^2} \cdot e^{-p}}$ (1)

4°) $f(t) = 5e^{-2t}\sin(3t)U(t)$ donc $\boxed{F(p) = 5 \cdot \frac{3}{(p+2)^2 + 9} = \frac{15}{(p+2)^2 + 9}}$ (1)

(B) 1°) $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$ donc $\boxed{f(t) = U(t) - tU(t) = (1-t)U(t)}$ (0,5)

2°) $F(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p+1}$ donc $\boxed{f(t) = U(t) + 2 \cdot e^{-t}U(t) = (1 + 2e^{-t})U(t)}$ (0,5)

3°) $F(p) = \frac{1}{p} e^{-p}$ donc $\boxed{f(t) = U(t-1)}$ (0,5)

4°) $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ donc $\boxed{f(t) = tU(t)e^{-t} = te^{-t}U(t)}$ (1)

5°) $F(p) = \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{p^2+4}$ donc $\boxed{F(p) = \frac{1}{2}\sin(2t)U(t)}$ (0,5)

6°) $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2+4} = \frac{p+2}{(p+2)^2+4} - \frac{2}{(p+2)^2+4}$

Donc $\boxed{f(t) = e^{-2t}\cos(2t)\,U(t) - e^{-2t} \cdot \sin(2t)}$ (1)