TS₂ET. Devoir n°1 pour le 16/09/2013

EXERCICE 2 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
On notera U la fonction échelon unité définie pour tout nombre réel t par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0[$. On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions causales notées respectivement e et s. Ce système est du second ordre, c'est à dire que les fonctions e et s sont liées sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par une équation différentielle du type

$$s''(t) + b\,s'(t) + c\,s(t) = c\,e(t),$$

où b et c désignent des constantes réelles.
On suppose de plus dans tout l'exercice que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

Partie A : résolution d'une équation différentielle du second ordre

Dans cette partie, on suppose que $b = 1$ et $c = 0{,}25$. De plus, le signal d'entrée, constant, est défini pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $e(t) = 10$.

La fonction causale s est donc solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' + y' + 0{,}25y = 2{,}5.$$

1. Déterminer une fonction constante sur $[0; +\infty[$ solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' + 0{,}25y = 0$.
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle est celle de $s(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$? Recopier la réponse choisie sur la copie.

- $5t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$
- $10 - (5t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$
- $10 - (2{,}5t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}25t}$
- $10 - (10t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$