Classe: TS1ET	Date: 27 février 2014	**Type** Devoir surveillé
Devoir n°10		
Thème: exponentielle et logarithme		

Exercice 1:

1°) Ecrire sous forme simplifiée en expliquant clairement:

$A=e^{-\ln(3)}$; $B=e^{3\ln(2)}$; $C=e^{\frac{\ln(49)}{2}}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes:

a) $e^{2x}-3=0$.

b) $e^{2x}\geqslant 4$

c) $e^{2x}-e^{x}-2=0$.

d) $\ln(e^{x}-1)<2$.

3°) Calculer les dérivées (en détaillant) des fonctions:

- $f(x)=e^{3x}$.
- $g(x)=xe^{x}$.
- $h(x)=e^{x^2-2x}$.
- $k(x)=(2x^2-7x+8)e^{2x}$

Exercice 2: Une étude de fonction avec exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=e^{x}-x-1$.

a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Déterminer f'(x) et étudier les variations de f.

c) Montrer que la droite Δ d'équation: y = -x - 1 est asymptote à la courbe représentative C_f de f lorsque x tend vers $-\infty$.

Représenter la courbe C_f.

Exercice 1

1°) $A = e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$ 1

$B = e^{3\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = 8$ 1

$C = e^{\frac{\ln(49)}{2}} = \left(e^{\ln(49)}\right)^{1/2} = 49^{1/2} = \sqrt{49} = 7$ 1

2°) a) * Ensemble de définition de l'équation : $\mathbb{R}$

* Résolution sur $\mathbb{R}$

$e^{2x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 3$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\ln(3)}$ 1

b) * ensemble de définition de l'inéquation : $\mathbb{R}$

* Résolution sur $\mathbb{R}$

$e^{2x} \geqslant 4$

$\Leftrightarrow 2x \geqslant \ln 4$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}\ln(4)$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}\ln(2^2)$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}\cdot 2\ln(2)$

$\Leftrightarrow \boxed{x \geqslant \ln(2)}$ 1

c) * ensemble de définition de l'équation : $\mathbb{R}$

* Résolution sur $\mathbb{R}$

$e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$

On pose $X = e^x$, donc $X^2 = e^{2x}$

L'équation s'écrit alors :

$X^2 - X - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

Il y a deux solutions :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1 \\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

on revient à x :

$e^x = X_1$ ou $e^x = X_2$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -1}_{\text{impossible car } e^x>0}$ ou $e^x = 2$

$\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 2}$ 1,5

d) * ensemble de définition de l'inéquation

Il faut que : $e^x - 1 > 0$ (car on a $\ln(e^x-1)$)

$\Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 0$

Donc $D =]0 ; +\infty[$

* Résolution sur D.

$\ln(e^x - 1) < 2$

$\Leftrightarrow e^x - 1 < e^2$ (on a pris l'exp. des deux membres)

$\Leftrightarrow e^x < 1 + e^2$

$\Leftrightarrow x < \ln(1+e^2)$ 1,5

* conclusion : Les solutions sont les nombre $x \in]0 ; \ln(1+e^2)[$

3°) • $f(x) = e^{3x}$ donc $\boxed{f'(x) = 3e^{3x}}$ 1

• $g(x) = xe^x = u.v$ avec $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

donc $g'(x) = u'v + uv' = 1 \times e^x + xe^x = (1+x)e^x = (x+1)e^x$

$\boxed{g'(x) = (x+1)e^x}$ 1

• $h(x) = e^{x^2-2x} = e^u$ avec $u = x^2 - 2x$, $u' = 2x - 2$

Donc $\boxed{h'(x) = u'e^u = (2x-2)e^{x^2-2x}}$ 1

- $k(x) = (2x^2-7x+8)e^{2x} = u.v$ avec $\begin{cases} u = 2x^2-7x+8 & u' = 4x-7 \\ v = e^{2x} & v' = 2e^{2x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} k'(x) &= u'v + uv' \\ &= (4x-7)e^{2x} + (2x^2-7x+8).2e^{2x} \\ &= [(4x-7)+(4x^2-14x+16)]\,e^{2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{k'(x) = (4x^2-10x+9)\,e^{2x}}$$ 1

Exercice 2 $f(x) = e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

a) • <u>Limite en $+\infty$</u> : Il faut modifier l'écriture de f car on a une forme indéterminée.

$$f(x) = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$

<u>or</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$ (cours)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, <u>on a</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ 1

• <u>Limite en $-\infty$</u>

$f(x) = e^x - x - 1$

on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{(cours)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty \end{array}\right\}$ <u>donc</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ 1 b). • $f(x) = e^x - x - 1$

Donc $\boxed{f'(x) = e^x - 1}$ 1

• Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.

Or $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1$ $\Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(1)$ $\Leftrightarrow x = \ln(1)$ 1

$\Leftrightarrow x \geq 0$ $\Leftrightarrow x = 0$

D'où le tableau des variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1,5

$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

c) Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-x-1)\right) = 0$

Or $f(x) - (-x-1) = e^x$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-x-1)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x\right) = 0$

Donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ 1 courbe représentative.

1,5

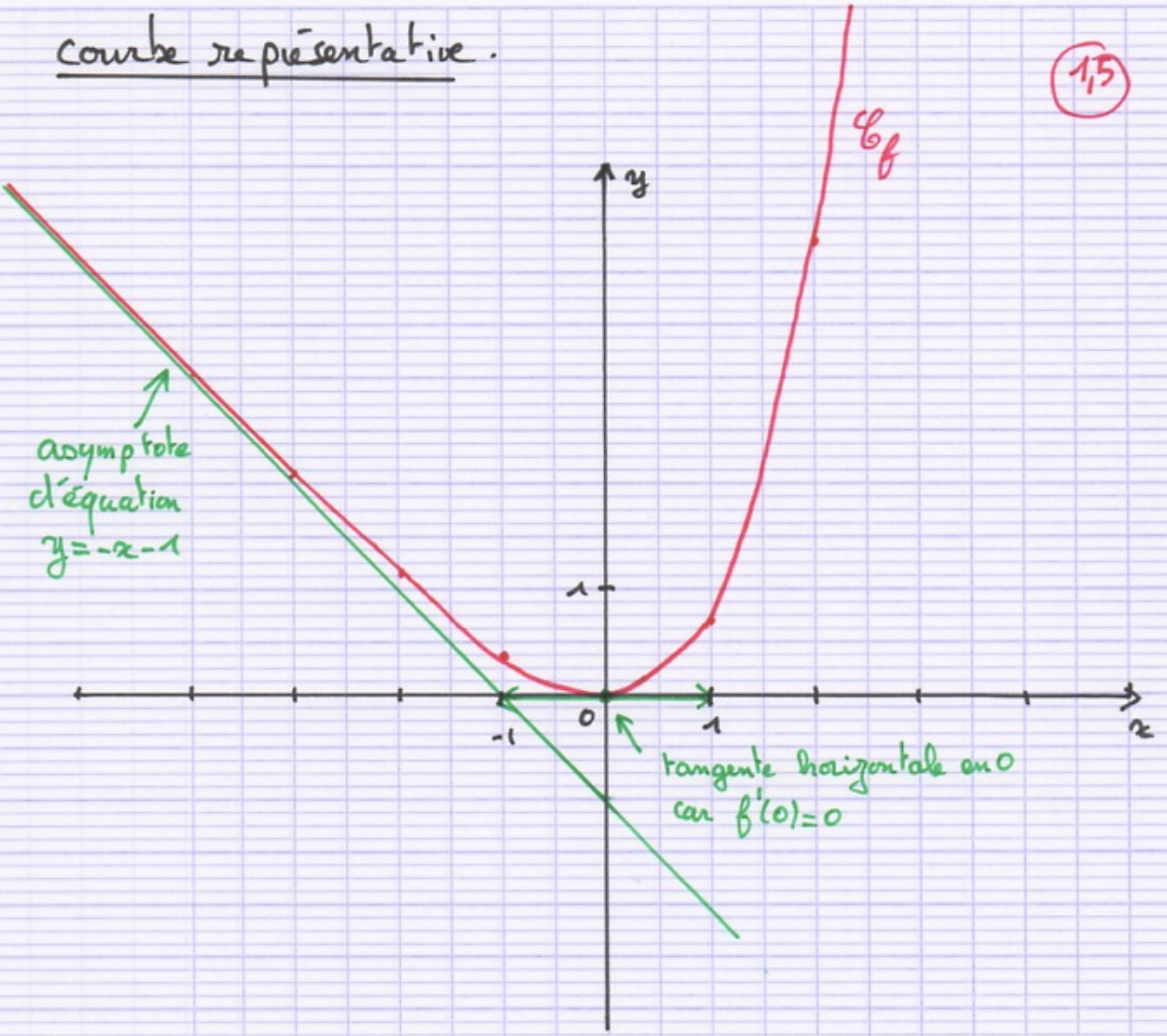

tableau de quelques valeurs (calculatrice)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4,007	3,018	2,05	1,13	0,37	0	0,72	4,39	16,09