

Chapitre : Loi binomiale

1/

I. Rappels sur les variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité P sur un ensemble fini Ω (l'univers).

On appelle v.a. (variable aléatoire) toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.
(Définir une v.a. X sur Ω c'est donc associer à chaque éventualité ω_i de Ω un nombre réel.)

① Loi de probabilité d'une v.a. X .

Déterminer la loi de probabilité de X c'est déterminer :

- Les différentes valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X .
- Les probabilités $p_i = P(X=x_i)$

On résume souvent la loi d'une v.a. X par un tableau :

valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p_i = P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

② Espérance, variance et écart type.

- L'espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

C'est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs proba.

- La variance de X est le réel noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

(formule utilisée souvent pour les calculs)

(2)

La variance mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à la moyenne : plus elle est grande, plus les valeurs prises sont éloignées de la moyenne.

- L'écart type de X , noté $\sigma(X)$, est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart type a la même unité que X .

propriétés : On a les propriétés suivantes ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) :

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

→ Voir exercices 1 et 2.

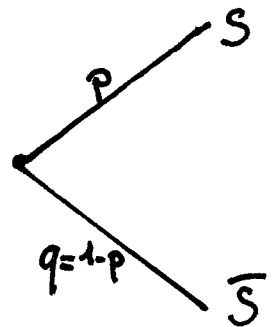
II - Loi binomiale.

① Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues :

- L'une que l'on nomme "Succès" que l'on note S avec $P(S) = p$.
- L'autre nommée "ÉCHEC" que l'on note $\bar{S}$ avec $P(\bar{S}) = q = 1-p$

arbre de probabilités correspondant.



② Variable aléatoire de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , la v.a. X qui prend la valeur 1 si S se produit et 0 sinon suit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	q	p

avec $q = 1-p$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p

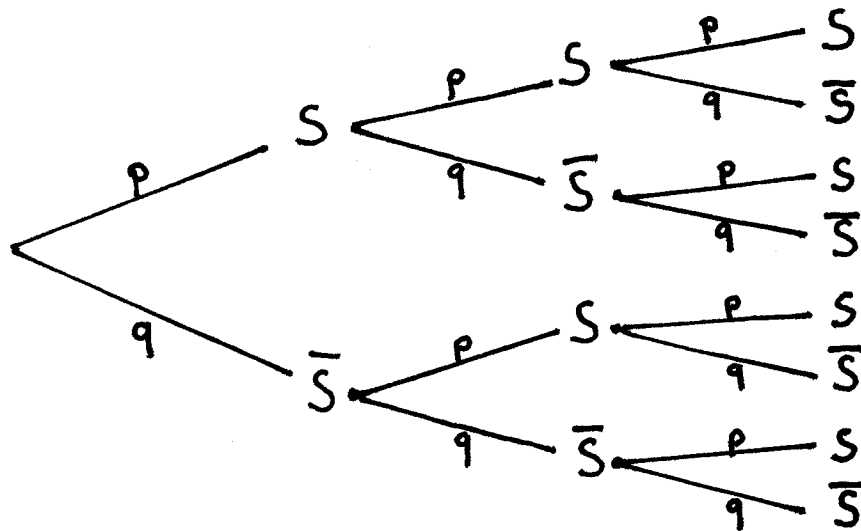
On a : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ (avec $q = 1-p$)

③ Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple: On répète trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p .

On représente cette situation par l'arbre suivant (qu'on appelle aussi schéma de Bernoulli)



④ Loi binomiale

a) Définition: On considère un schéma de Bernoulli, répétition de m épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p . X est la v.a. qui indique le nombre de succès sur ces m épreuves.

La loi de probabilité de la v.a. X (égale au nombre de succès au cours de ces m épreuves) se nomme loi binomiale de paramètres m et p . On la note : $B(m; p)$

Cette v.a. prend les valeurs entières : $0; 1; 2; \dots; m$

4/

Exemple: | On jette 3 fois de suite un dé non pipé.
On note X la v.a. qui indique le nombre
de 6 obtenue au bout des 3 lancers.

- 1°) Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
- 2°) Dressez l'arbre de probabilités pondérées correspondant.
- 3°) Donner la loi de X sous forme d'un tableau.

b) Coefficients binomiaux

On réalise l'arbre d'un schéma de Bernoulli identiques et indépendantes.

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, le nombre de chemins réalisant k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux

↑
on lit: " k parmi n "

Exemple: En utilisant le schéma du 4a) donner:

$$\binom{3}{0} = \quad \binom{3}{1} = \quad \binom{3}{2} = \quad \binom{3}{3} =$$

On a les propriétés suivantes:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

formule de Pascal: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

c) Propriétés sur les lois binomiales

Si X est une v.a. qui suit la loi binomiale de paramètres n et p alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q=1-p$$

De plus: $E(X) = np$ et $V(X) = npq$

d) Calculs pratiques• Calculer un coefficient binomial

exemple: calculer $\binom{10}{3}$, c'est à dire le nombre de combinaisons de 3 parmi 10.

→ Avec la calculatrice: $10 \text{ nCr } 3 =$
 $\uparrow$
 menu: MATH → PRB

→ Avec une formule: $\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}$ ← k produits

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 =$$

• Calcul pratique de $P(X=k)$ et $P(X \leq k)$ si X suit la loi binomiale $B(m; p)$

→ Avec la calculatrice:

$$P(X=k) \rightarrow \frac{\text{binomFdp}(m, p, k)}{\text{menu distrib}}$$

$$P(X \leq k) \rightarrow \text{binomFrep}(m, p, k)$$

→ On peut aussi utiliser la formule:

$$P(X=k) = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$$

exemple: X suit la loi binomiale $B(m=5; p=0,3)$

Calculer $P(X=2)$ $P(X=3)$ et $P(X \leq 3)$.

Exercices loi binomiale

m⁰¹

La loi de probabilité d'une v.a. X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$

1°) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 2°) Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice.
 3°) Quelles sont les valeurs prises par la v.a. : $Y = -3X + 2$.
 4°) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

m⁰²

Un joueur lance un dé équilibré, et :

- il gagne 1 € si le dé amène 1, 2 ou 3, 0,5 € si le dé amène 4,
- il perd 2 € si le dé amène 5 ou 6.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat amené par le dé, associe le gain en euros (positif ou négatif) du joueur.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X .
 2°) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
 3°) Utiliser le menu Statistiques de la calculatrice pour retrouver les résultats de la question précédente.

m⁰³

1° À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de chacun des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{8}{3}, \binom{21}{9}, \binom{36}{17}, \binom{36}{18}$$

2° Sans calculatrice, donner la valeur de $\binom{2012}{2011}, \binom{21}{12}$ et $\binom{37}{18}$.

m⁰⁴

Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,2$?

m⁰⁵

Sachant que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, calculer :

Pour a) et b) les résultats sont à arrondir à 10^{-3} .

a) pour $n = 6$ et $p = 0,4$
 $P(X = 3), P(X = 0), P(X \leq 2), E(X), \sigma(X)$;

b) pour $n = 6$ et $p = 0,6$
 $P(X = 6), P(X \leq 2), P(X > 1)$;

Pour c) et d) on donnera les résultats avec un seul chiffre non nul.

c) pour $n = 50$ et $p = 0,5$
 $P(X = 0), P(X = 49), P(X < 50), E(X)$;

d) pour $n = 100$ et $p = 0,05$
 $P(X = 0), P(X = 100), P(X = 2), E(X)$;

m⁰⁶

Tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

Une urne contient dix boules dont trois rouges.

On tire huit boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

2° Calculer $P(X \leq 5)$.

3° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

Que représente $E(X)$?

m⁰⁷

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

À la livraison d'un grand nombre de pièces dont 1 % sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 50 pièces.

La population est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de cinquante pièces. On a donc une succession de cinquante épreuves indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « L'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse » ;
 B : « L'échantillon comporte une seule pièce défectueuse » ;
 C : « L'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses ».