

Exercice 3

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 2$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $f(t) = 0$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$. De plus f est une fonction paire et 2π -périodique.

1) Dessiner f sur $[-\pi; 2\pi]$

2) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $b_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(n\omega t) dt$

On appelle $S(t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f

5) Exprimer la somme partielle : $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de f , noté $V_{eff(f)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt$

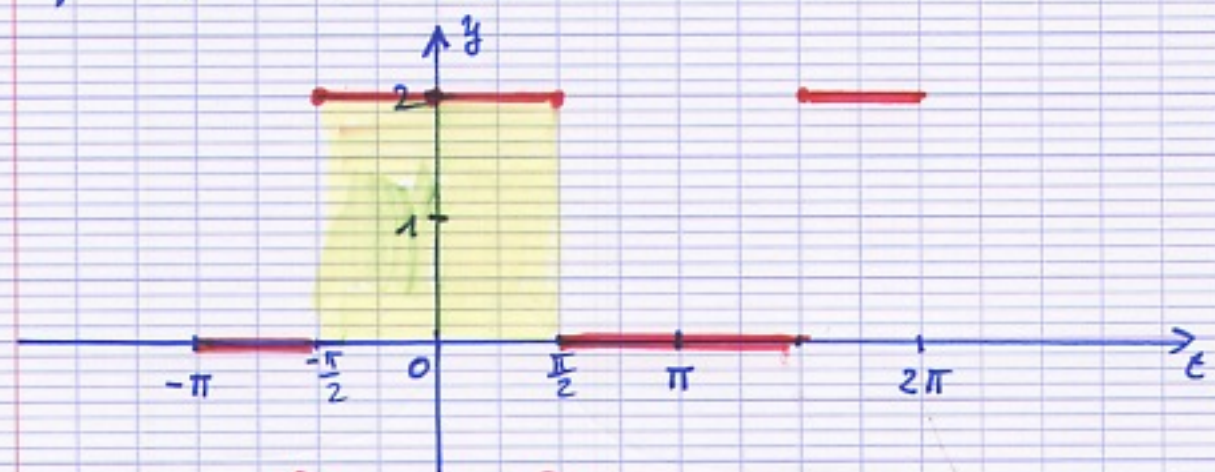
7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que

$$V_{eff(S_5)}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^5 a_n^2 + b_n^2, \text{ calculer } V_{eff(S_5)}^2$$

8) Montrer que le rapport $\frac{V_{eff(S_5)}^2}{V_{eff(f)}^2}$ est proche de 1.

Exercice 3

- 1°) $f(t) = 2 \sin [0; \frac{\pi}{2}]$
 $f(t) = 0 \sin]\frac{\pi}{2}; \pi[$
 f est paire
 f est périodique de période 2π



② car f est paire
 ① par définition sur $[0; \pi[$

③ par translation

2°) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \times (\pi \times 2) = 1$ (c'est la valeur moyenne)
 aie du rectangle colorie.

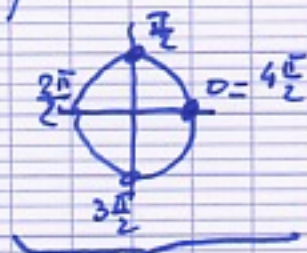
3°) $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt$ $\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos(mt) dt$

$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2 \sin(mt)}{m} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2 \sin(n\frac{\pi}{2})}{m} - \frac{2 \sin(-n\frac{\pi}{2})}{m} \right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right)$$

$$a_n = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi \cdot n}$$



on remarque que
 $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ vaut $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

4°) La fonction f est paire, donc $\boxed{b_n = 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \quad a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{4}{\pi} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{4}{3\pi} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= \frac{4}{5\pi} \end{aligned}$$

$$b_1 = 0 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$$

Donc $S_5(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5t)$

$$6^\circ) \quad V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 dt = \frac{1}{2\pi} \times \pi \times 4 = 2$$

$$7^\circ) \quad V_{eff}^2(S_5) = 1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{9\pi^2} + \frac{16}{25\pi^2} \right) = 1,933$$

$$8^\circ) \quad \frac{V_{eff}^2(S_5)}{V_{eff}^2(f)} = \frac{1,933}{2} \approx 0,966 \quad \text{proche de } 1$$