EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

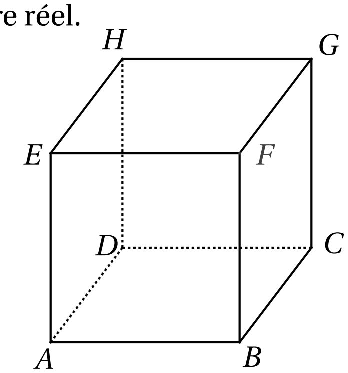
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1\,,\,-2,\,-2)$.
   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 1 : (5 points) ***Commun à tous les candidats***

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0,4,1)$, $B(1,3,0)$, $C(2,-1,-2)$ et $D(7,-1,4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-1,3)$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

   $$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère
– les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; −15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; −6), E (7 ; 3 ; −3) ;
– le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0$$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 9-3t\\ y &=& 0\\ z &=& 5+5t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3

La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

EXERCICE 1 : (4 points) ***Commun à tous les candidats***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(1,-1,2)$, $B(3,3,8)$, $C(-3,5,4)$ et $D(1,2,3)$.

On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = k+1 \\ y = k+3 \\ z = -k+4 \end{cases}$, $k \in \mathbf{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :

Proposition a : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
Proposition b : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.
Proposition c : Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition d : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :

Proposition a : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition b : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition c : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition d : Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Question 3 :

Proposition a : Les points A, D et C sont alignés.
Proposition b : Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition c : Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition d : Le point D est le milieu du segment $[AB]$.

Question 4 :
On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

Proposition a : $\vec{n}(-1,5,4)$
Proposition b : $\vec{n}(3,-1,2)$
Proposition c : $\vec{n}(1,2,3)$
Proposition d : $\vec{n}(1,1,-1)$

EXERCICE 2 : (4 points) ***Commun à tous les candidats***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ ***b.*** $\sqrt{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ ***c.*** $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ ***d.*** $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution
b. deux solutions
c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite
d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1,2,3)$, $B(-1,5,4)$ et $C(-1,0,4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ ***b.*** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ ***c.*** $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ ***d.*** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1,2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,,-5\,,1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.
c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t+2t' \\ y=-t-2t' \\ z=-1-t+3t' \end{cases}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-1-t \end{cases}$

On donne les points de l'espace M(–1 ; 2 ; 3) et N(1 ; –2 ; 9).

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a) $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=t+2t' \\ y=1-t+t' \\ z=-1-t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=t+t' \\ y=1-t-2t' \\ z=1-t-3t' \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=1+2t+t' \\ y=1-2t+2t' \\ z=-1-t' \end{cases}$

2. a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A(–8 ; 3 ; 2).
   b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c) La droite (D) est une droite du plan (P).
   d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=-3-t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

feuille 1 Exercice 3 : sujet National 2013.

1°) On cherche l'ensemble des points M d'affixe z du plan qui vérifient :

$$|z-i| = |z+1|$$

On traduit cette égalité à l'aide de l'interprétation géométrique du module :

$|z-i| = AM$ où A d'affixe i

$|z+1| = BM$ où B d'affixe -1.

Ainsi $|z-i| = |z+1|$

$\Leftrightarrow AM = BM$

On reconnait ici la médiatrice du segment [AB] (ensemble des points équidistants de A et de B)

C'est bien une droite.

conclusion : $\boxed{\text{La proposition 1 est vraie}}$.

2°) Je calcule :

$$(1+i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

donc $(1+i\sqrt{3})^4 = (-2+2i\sqrt{3})^2 = 4 - 8i\sqrt{3} - 4\times 3 = -8 - 8i\sqrt{3}$

Donc $(1+i\sqrt{3})^4$ n'est pas un réel !

conclusion : $\boxed{\text{La proposition 2 est fausse}}$

3°) On se place dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ qui est orthonormé car ABCDEFGH est un cube.

On a, dans ce repère : $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc : $\vec{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

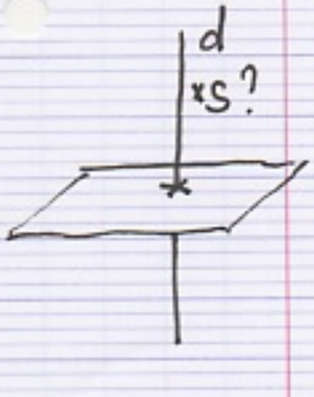
D'où : $\vec{EC}.\vec{BG} = 1\times0 + 1\times1 + (-1)\times1 = 0+1-1 = 0$

Donc $(EC) \perp (BG)$

Conclusion : $\boxed{\text{La proposition 3 est vraie}}$

4°) Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

Notons d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{cases}$



D'après le cours, un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaire, alors d est orthogonale à $\mathcal{P}$

Il reste à verifier que $S \in d$.

Or $S \in d \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} 1 = 2+t \\ -2 = -1+t \\ -2 = 1+3t \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$

Donc $S \in d$

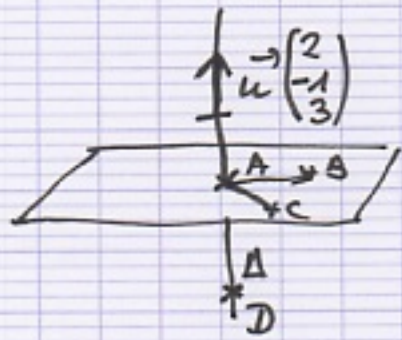
Conclusion : $\boxed{\text{La proposition 4 est vraie}}$

feuille 2 : **Exercice 1 :** Amérique du Nord 2013

1°) <u>On a</u> $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2°) a) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D



<u>or</u> : $\vec{u}\cdot\vec{AB} = 2\times1 + (-1)\times(-1) + (-1)\times3$
$= 2 + 1 - 3 = 0$
donc $\boxed{\vec{u} \perp \vec{AB}}$

<u>de plus</u> : $\vec{u}\cdot\vec{AC} = 2\times2 + (-1)\times(-5) + 3\times(-3)$
$= 4 + 5 - 9 = 0$
donc $\boxed{\vec{u} \perp \vec{AC}}$

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

<u>Ainsi : Δ est orthogonale au plan (ABC)</u>

2°b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur ~~donc~~ normal au plan (ABC) (voir 2°a)

Donc le plan (ABC) a une équation de la forme :
$$2x - y + 3z + d = 0$$
Comme $A(0;4;1) \in (ABC)$ donc $0 - 4 + 3 + d = 0$
donc $d = 1$

<u>conclusion</u> : Une équation de (ABC) est :
$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0}$$

2c) Δ est la droite qui passe par $D(7;-1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$

Ainsi :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{DM} = t\vec{u} \quad \text{avec } \vec{DM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y+1 \\ z-4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2t \\ y+1 = -t \\ z-4 = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

système d'équations paramétriques qui représente Δ.

2d) $H \in \Delta \cap (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad \leftarrow \text{(équation de (ABC))}$$

on remplace ici

on trouve

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0 \\ x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14+4t+1+t+12+9t+1 = 0 \\ x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14t = -28 \\ x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = -2 \\ x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{H(3\,;1\,;-2)}$

3. a) on note $\vec{n_1}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n_2}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$.

On a : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car les coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, <u>ils sont donc sécants</u>.

3 b) Il y a deux méthodes (voir aussi celle du cours, qui permet de trouver le système paramétrique sans le connaître)

Ici on me donne le système qui représente une droite d et je sais que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en un droite.

* Si $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in d$ alors $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Je remplace dans le 1^ier^ membre de l'équation de $\mathcal{P}_1$

$$x+y+z = (-4t-2)+t+3t+2 = 0$$

Donc tous les points de d sont dans $\mathcal{P}_1$ donc $d \underset{\text{"inclus"}}{\subset} \mathcal{P}_1$

* De même, je montre que $d \subset \mathcal{P}_2$ car :

$$x+4y+2 = -4t-2+4t+2 = 0$$

Donc tous les point de d sons aussi dans $\mathcal{P}_1$

<u>conclusion</u> : L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est bien la droite (d).

3c) $d : \begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

(ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$

<u>feuille 3</u> : <u>Exercice 2</u> : Centres Etrangers 2013

* <u>Affirmation 1</u>

$\mathcal{P}$ a pour équation : $2x+y-2z-5=0$
donc un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

L'équation proposée : $2x+y+2z-24=0$
représente ~~est~~ un plan de vecteur normal $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

or $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, donc les deux plans sont sécants, ils ne peuvent pas être parallèles !

<u>conclusion</u> : L'affirmation 1 est fausse.

* <u>Affirmation 2</u>

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\20\end{pmatrix}$

Je note (d) la droite dont une représentation est : $\begin{cases} x = 9-3t \\ y = 0 \\ z = 5+5t \end{cases}$

- Le vecteur $\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\20\end{pmatrix}$ est colinéaire à un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ de (d) car $4\vec{u}=\vec{AC}$

Donc (d) // (AC).

- Vérifions que $A(12;0;0)\in(d)$.

$$\begin{cases}12 = 9-3t\\ y=0\\ z=5+5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\ \\ t=-1\end{cases} \Leftrightarrow t=-1$$

Donc $A(12;0;0)\in(d)$.

Conclusion : Les deux droites sont parallèles et passent toutes les deux par A, donc l'affirmation 2 est vraie.

* Affirmation 3

La droite (DE) passe par $D(2;7;-6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{DE}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$.

Sa représentation paramétrique peut s'écrire :

$$\begin{cases}x=2+5t\\ y=7-4t\\ z=-6+3t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Ainsi :

$M(x;y;z)\in\mathcal{P}\cap(DE)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-2z-5=0\\ x=2+5t\\ y=7-4t\\ z=-6+3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(2+5t)+7-4t-2(-6+3t)-5=0\\ x=2+5t\\ y=7-4t\\ z=-6+3t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+10t+7-4t+12-6t-5=0 \\ x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0t+18=0 \quad \leftarrow \text{impossible.} \\ x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \end{cases}$$

Donc le système n'a pas de solutions, il n'y a pas de points d'intersection.

<u>conclusion :</u> | L'affirmation 3 est fausse.

* <u>Affirmation 4</u>

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-12\\-15\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\20\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC). (Ils ne sont pas colinéaires)

or $\vec{DE}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$.

<u>Donc</u> $\vec{AB}.\vec{DE} = -12\times5 - 15\times(-4)+0 = -60+60=0$

et $\vec{AC}.\vec{DE} = -12\times5+0+20\times3 = -60+60=0$

Ainsi (DE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), elle est donc orthogonale au plan (ABC)

<u>conclusion :</u> | L'affirmation 4 est vraie.

feuille 4 : Exercice 1, Liban 2013 (en rouge, des explications non demandées)

1. d) En effet, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Or $\vec{u}\cdot\vec{u}' = 1+2-3 = 0$
Donc $\vec{u}\perp\vec{u}'$, donc $\mathcal{D}\perp\mathcal{D}'$

2. c) • D'abord $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}$ car en remplaçant les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$, à savoir $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+2 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

on obtient :

$$\begin{aligned} x+y-z+2 &= (t+1)+(2t-1)-(3t+2)+2 \\ &= 0t+1-1-2+2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc tous les points de $\mathcal{D}$ sont dans $\mathcal{P}$
donc $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$

• De plus, un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
et un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est aussi $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

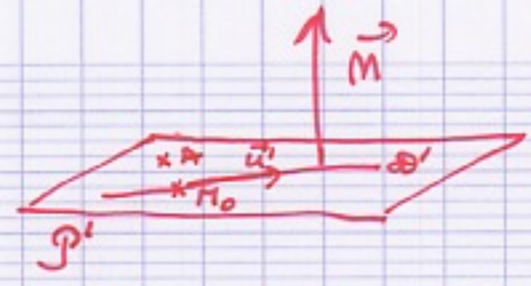
Donc $\mathcal{D}'$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

3. c. en effet : • $\vec{AD}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$: pas colinéaires, donc a) faux

• $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$: $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 28 \neq 0$
donc b) est faux

• si I milieu de [AB] : $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{4}{2} = 2$
Donc D n'est pas le milieu de [AB]
donc d) est faux.
→ il ne reste que c)

4. b) En effet :



Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Soit M_0 le point de paramètre 0 de $\mathcal{D}'$: $M_0\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$

On a : $\vec{v} = \vec{AM_0}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$

Comme $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ces deux vecteurs dirigent le plan $\mathcal{P}'$. Parmi les solutions, on cherche le vecteur $\vec{n}$ tel que :

$$\vec{n}.\vec{u}' = 0 \text{ et } \vec{n}.\vec{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Le seul cas est b).

---

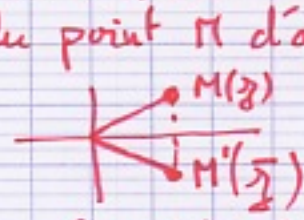
feuille 5 : Polynésie 2013

1°) $i\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

$\boxed{1°)\ d}$

2°) $-z = \bar{z}$: géométriquement, le conjugué d'un nombre complexe est représenté par le symétrique M' du point M d'affixe z.



On cherche ici tous les points du plan dont le conjugué est l'opposé. Ce sont les points de l'axe (Oy).

donc $\boxed{2°)\ c)}$

3°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\+1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite cherchée.

on élimine b).

Il faut que la droite passe par $C\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

a) convient en prenant $t=0$.

donc $\boxed{3°a)}$

4°)

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

a) Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$: n'est pas colinéaire à $\vec{n}$. Donc a) faux.

b) On cherche l'intersection de Δ avec $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ a pour équation : $3x-5y+z+d=0$

comme $D\in\mathcal{P}$: $-3-10+3+d=0$

$d=10$

Donc $\mathcal{P}$: $3x-5y+z+10=0$

on remplace les coordonnées d'un point de Δ dans cette équation : $3(t-7)-5(t+3)+(2t+5)+10=0$

$\Leftrightarrow 0t-21-15+5+10=0$

$\Leftrightarrow 0t=-21$ ← impossible.

Donc Δ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

donc $\boxed{4°b}$

feuille 6 : Pondichery 2013

1°) on élimine a) car ce n'est pas la représentation paramétrique d'un plan (il n'y a qu'un seul paramètre)

(P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$
un vecteur normal à (P) est donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Sur les représentation paramétrique on peut lire les coordonnées de deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de P : il faut qu'ils soient tous les deux orthogonaux à $\vec{n}$ (on fera un produit scalaire)

Seul cas qui convient → Pour b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$: convient

Pour c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n} \neq 0$: à éliminer

Il reste d) : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$ à éliminer.

Donc $\boxed{1°)\ b.}$

2°) a) $A(-8 ; 3 ; 2)$ $\quad A \notin D$ car (D) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

pour trouver A, il faut prendre $t = -6$
mais alors $y = 6$!

a) ne convient pas.

13/14

b) un vecteur normal de (P) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

et un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Ils ne sont pas colinéaires : donc b) ne convient pas.

c) Les points de (D) ont pour coord. $\begin{cases}x=-2+t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}$

Remplaçons dans l'équation de (P) :

$$\begin{aligned}x-2y+3z+5 &= -2+t-2\times(-t)+3(-1-t)+5\\&= -2+t+2t-3-3t+5\\&=0\end{aligned}$$

Donc tous les points de (D) sont dans (P), donc (D) $\subset$ (P)

donc $\boxed{2°)\ c}$

3°. a) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (D)

$\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 2+4-6=0$ donc (MN) et (D) sont orth.

→ a) convient, c'est a) car une seule proposition est vraie

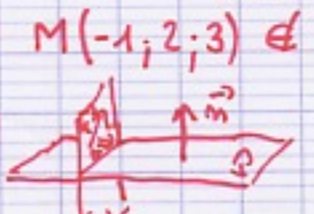
$\boxed{3°a)}$

4°) (P) : vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

(S) : vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

a) $\vec{n}.\vec{v} = 2+4+9 \neq 0$ donc a) faux.

c) $M(-1;2;3) \notin P$ donc c) faux

d) 

S'ils sont perpendiculaires alors $\vec{n} = a\vec{u}+b\vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b \\ -2 = -a - 2b \\ 3 = -a + 3b \end{cases}$ impossible car en faisant la somme : $\underline{-1 = 0}$

Donc d) est faux.

donc la seule vraie est b.

<u>verif</u> : (non nécessaire)

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z + 5 = 0 \\ x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + t + 2t' - 2(-t - 2t') + 3(-1 - t + 3t') + 5 = 0 \\ x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + \cancel{t} + 2t' + \cancel{2t} + 4t' - 3 - \cancel{3t} + 9t' + 5 = 0 \\ x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Or ceci est la droite Δ

car $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur

et le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui correspond au paramètre $t = 0$ dans la forme proposée correspond au point de paramètre $t = 2$ dans la forme trouvée.

donc $\boxed{4)\ b)}$ ouf !!