BACCALAUREAT BLANC

Mathématiques | Durée : 4 h 00 | Coefficient : 7 et 9 | Série : S

Consignes générales

Le sujet comporte quatre exercices. Les exercices 1, 2 et 3 sont communs à tous les candidats.
L'exercice 4 est différent selon que l'élève a choisi la spécialité « mathématiques » ou non.
<u>Chacun des exercices sera rédigé sur une copie séparée qui indiquera clairement en tête les références de l'exercice traité.</u>
L'usage de la calculatrice est autorisé. Tout échange de document et de matériel est strictement interdit.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Ce sujet comprend 5 pages.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès des trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$. Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.
Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut.
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
   On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :
   - F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
   - F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
   - F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
   - D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   a. Traduire en termes de probabilité les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.

Dans la suite on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.

   b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
   d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
   e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, calculer la probabilité qu'elle présente un défaut.

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires. On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.
   a. Calculer la probabilité qu'exactement deux paires de chaussettes d'un lot présentent un défaut : on donnera un résultat arrondi au millième.
   b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'algorithme suivant.

```
VARIABLES
U EST_DU_TYPE RÉEL
k EST_DU_TYPE ENTIER
N EST_DU_TYPE ENTIER NON NUL
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE N
    U PREND_LA_VALEUR 0
    POUR k ALLANT_DE 0 A N-1
        DEBUT_POUR
        U PREND_LA_VALEUR 3U-2k+3
        FIN_POUR
    AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?
(On indiquera les valeurs successives prises par la variable U)

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - n + 1.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 3^n + n - 1.$$

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
0,5 point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \sin x \cos x$.

   a. f est périodique de période π

   b. $f'(x) = -\sqrt{3}\sin(2x) - \cos x \sin x$ pour tout x reel

2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + 2z + 5 = 0$ d'inconnue z.

   a. On pose $z = x + iy$, x et y étant réels. Si z est solution de (E) alors $(x + 1)y = 0$

   b. Le produit des solutions de (E) est égal à - 5

3. La forme algébrique de $\frac{5 - 2i}{4 + 3i}$ est :

   a. $\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$

   b. La forme algébrique de $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) \times \left(\frac{8}{5} + \frac{2}{5}i\right)$

4. L'équation (E') a au moins une solution sur I. (E') peut être :

   a. $2x^3 + x - 4 = 0$ sur $I = [0 ; 2]$

   b. $-x^3 + \frac{1}{x} = 0$ sur $I = [2 ; +\infty[$

5. La fonction g définie sur $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ admet une asymptote d'équation :

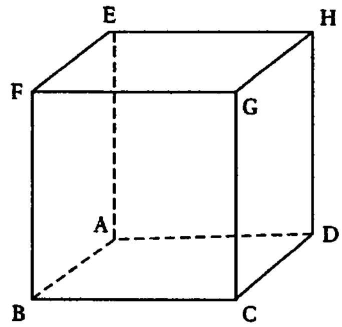
   a. $x = 2$

   b. $y = 2$

Exercice 4 (5 points)

A traiter par les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$, avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

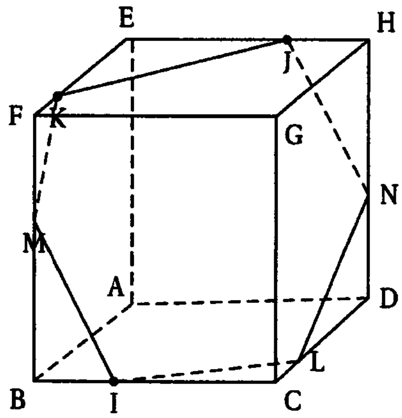
Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que le système $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + (a - \frac{3}{4})t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (KL).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. La figure donnée ci-contre fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).
Le but de cette question est de déterminer les coordonnées du point M.



a. Déterminer une équation paramétrique du plan (IJK).
b. En déduire les coordonnées du point M.

Exercice 4 (5 points)

A traiter par les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et de c_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels fixés, et $Y = AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$

où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
   b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :
   $$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n)c_0.$$
   Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Exercice 1

1°a) D'après l'énoncé : $\boxed{P(F_1)=\frac{1}{2}}$ et $\boxed{P(F_2)=\frac{1}{3}}$

On en déduit que $\boxed{P(F_3)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}}$

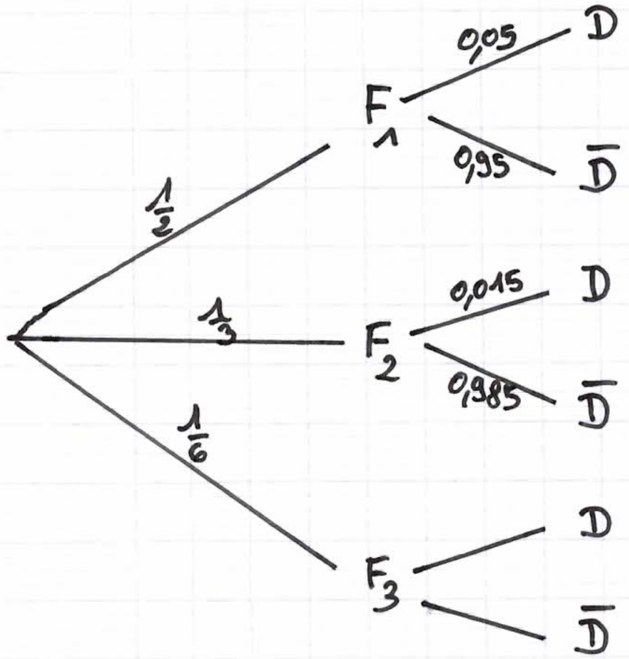
L'énoncé dit aussi : "5% des paires de F_1 ont un défaut"

Donc $\boxed{P_{F_1}(D)=0{,}05}$

de même, on a : $\boxed{P_{F_2}(D)=0{,}015}$ et $\boxed{P(D)=0{,}035}$

1,5 pts

1b) Faisons un arbre pondéré de probabilité qui résume la situation :



← cette branche représente l'événement : $F_1 \cap D$

<u>On cherche</u> $P(F_1 \cap D)$

$$P(F_1\cap D)=P(F_1)\times P_{F_1}(D)=\frac{1}{2}\times 0{,}05=\underline{\underline{0{,}025}}$$ (d'après l'arbre)

0,5 pt

1c) $P(F_2\cap D)=P(F_2)\times P_{F_2}(D)=\frac{1}{3}\times 0{,}015=\underline{\underline{0{,}005}}$ (d'après l'arbre)

0,5 pt

1d) On sait que $P(D)=0{,}035$.

or $P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + F(F_3 \cap D)$

Donc $P(F_3 \cap D) = P(D) - P(F_1 \cap D) - P(F_2 \cap D)$

$= 0{,}035 - 0{,}025 - 0{,}005 = 0{,}005$

$\boxed{P(F_3 \cap D) = 0{,}005}$

0,5 pt

1c) On cherche $P_{F_3}(D)$

Or $P_{F_3}(D) = \dfrac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)} = \dfrac{0{,}005}{\frac{1}{6}} = 6 \times 0{,}005 = 0{,}030$

$\boxed{P_{F_3}(D) = 0{,}030}$

0,75 pt

2°) Soit X la v.a. qui indique le nombre de chaussettes qui présentent un défaut parmi les six paires d'un lot.

On est en présence d'un schéma de Bernoulli. En effet, on répète 6 fois la même expérience de Bernoulli de manière indépendante :

- SUCCÈS = "la paire présente un défaut"
- ECHEC = "la paire ne présente pas de défaut"

Comme $P(D) = 0{,}035$, on sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=6\,;\, p=0{,}035)$ ← 0,5 pt

a) dans cette question on cherche $P(X=2)$

$P(X=2) = \binom{6}{2} p^2 q^4 = 15 \times 0{,}035^2 \times 0{,}965^4 \simeq 0{,}016$ (arrondi à 10^{-3} près)

0,25 pt

b) On cherche ici : $P(X \leq 1)$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= \binom{6}{0} p^0 q^6 + \binom{6}{1} p^1 q^5 = 1 \times 1 \times 0{,}965^6 + 6 \times 0{,}035 \times 0{,}965^5$

$= 0{,}8075 + 0{,}1757$

$= 0{,}983$ arrondi à 10^{-3} près

0,5 pt

Exercice 2

PARTIE A : $N = 3$, $U = 0$

Début de la boucle : "Pour k allant de 0 à 2"

$k=0$; $U = 3\times 0 - 2\times 0 + 3 = 3$

$k=1$; $U = 3U - 2k + 3 = 3\times 3 - 2 + 3 = 10$

$k=2$; $U = 3U - 2k + 3 = 3\times 10 - 2\times 2 + 3 = 30 - 4 + 3 = 29$

Sortie de la boucle : U vaut 29.

0,75 pt

PARTIE B

1°) $u_0 = 0$; $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$; $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$

Conclusion : $\boxed{u_1 = 3 \text{ et } u_2 = 10}$

0,5 pt

2°) a) Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$

* L'inégalité est vraie pour $n=0$ car $u_0 = 0 \geqslant 0$
* hypothèse de récurrence : Pour n fixé, $u_n \geqslant n$

(on veut démontrer qu'alors $u_{n+1} \geqslant n+1$)

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \geqslant n$$
$$\Rightarrow 3u_n \geqslant 3n$$
$$\Rightarrow 3u_n - 2n \geqslant 3n - 2n$$
$$\Rightarrow 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3$$

c.à.d : $u_{n+1} \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$

Donc nécessairement : $\boxed{u_{n+1} \geqslant n+1}$

La propriété : "$u_n \geqslant n$" est donc héréditaire.

* Conclusion : Comme la propriété est initialisée pour $n=0$ et qu'elle est héréditaire, donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$

1 pt

2°) b) On a montré que : $u_n \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$

0,5 pt

3°) Calculons $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n$

$$= 2u_n - 2n + 3$$
$$= 2(u_n - n) + 3$$

Or d'après 2a) : $u_n \geq n$, donc $u_n - n \geq 0$

ainsi $2(u_n - n) + 3 \geq 3 > 0$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

1pt

4a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1$

$$= 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$$
$$= 3u_n - 3n + 3$$
$$= 3(u_n - n + 1)$$
$$= 3v_n \quad (\text{ceci pour tout } n \in \mathbb{N})$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3.

0,75pt

4b) Comme (v_n) est géométrique de raison 3, de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$

Donc $v_n = v_0 . 3^n = 3^n$

Or $v_n = u_n - n + 1$

Donc $u_n = v_n + n - 1$

c.à.d : $\boxed{u_n = 3^n + n - 1}$

0,5pt

CORRECTION BAC Blanc

Exercice 3 : $10 \times 0,5 = 5$ points

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \sin x \cos x$.

   a. f est périodique de période π :

   Vrai avec $f(x + \pi) = f(\pi)$ pour tout x réel.

   b. $f'(x) = -\sqrt{3}\sin(2x) - \cos x \sin x$:

   Faux cela donne $f'(x) = -\sqrt{3}\sin(2x) + \cos^2 x - \sin^2 x$

2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + 2z + 5 = 0$ d'inconnue z.

   a. Si $z = x + iy$ est solution de (E) alors $(x + 1)y = 0$.

   Vrai car on remplace z par $x + iy$ dans l'équation et on regarde les parties imaginaires.

   b. Le produit des solutions de (E) est égal à - 5 :

   Faux. Les solutions sont $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Et le produit est 5.

3. La forme algébrique de $\frac{5 - 2i}{4 + 3i}$ est :

   a. $\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$:

   Vrai avec le détail des calculs.

   b. La forme algébrique de $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) \times \left(\frac{8}{5} + \frac{2}{5}i\right)$:

   Faux car c'est égal à $\frac{14}{25} - \frac{22}{25}i$

4. L'équation (E') a au moins une solution sur I. (E') peut être

   a. $2x^3 + x - 4 = 0$ sur $I = [0 ; 2]$:

   Vrai car la fonction $f(x) = 2x^3 + x - 4$ est continue et croissante de - 4 à 14.

   b. $-x^3 + \frac{1}{x} = 0$ sur $I = [2 ; +\infty[$:

   Faux la fonction $g(x) = -x^3 + \frac{1}{x}$ est continue, décroissante et inférieure à - 7,5.

5. La fonction g définie sur $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ admet une asymptote d'équation :

   a. $x = 2$.

   Vrai car la limite en 2^+ vaut $+\infty$.

   b. $y = 2$.

   Faux car la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Exercice 4 :

Partie A

1. On calcule $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,25 pt), on obtient $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$, avec t réel (0,5 pt).

2. On calcule $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} a - \frac{3}{4} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (0,25 pt), on obtient $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + (a - \frac{3}{4})t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$, avec t' réel (0,25 pt).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système $\begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} + (a - \frac{3}{4})t' \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$

admet une unique solution. Par résolution des deux dernières équations, on obtient $t = t' = \frac{1}{2}$.

D'où avec la première équation, on trouve $a = \frac{1}{4}$ (1 pt)

Partie B

1. Avec les vecteurs $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,25 pt) et $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,25 pt).

Les vecteurs sont égaux alors IKJL est un parallélogramme (0,25 pt).

2. a. Avec les vecteurs $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut trouver une équation paramétrique

du plan (IJK) : $\begin{cases} x = -t - \frac{1}{4}t' + 1 \\ y = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' + \frac{1}{3} \\ z = t + t' \end{cases}$ avec t et t' réels. (0,5 pt)

b. On déterminer une équation paramétrique de la droite (BF) sous la forme $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}$ avec s

réel (0,5 pt). On résout alors le système $\begin{cases} -t - \frac{1}{4}t' + 1 = 1 \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ qui donne $t = -\frac{1}{5}$ et $t' = \frac{4}{5}$.

D'où les coordonnées de M $\left(1; 0; \frac{3}{5}\right)$. (1 pt)