

Ex 3 p 22

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 2 \end{cases} \quad \leftarrow$$

Calculons les premiers termes.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + 2 \times 0 + 2 && (\text{formule pour } n=0) \\ &= 0 + 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + 2 \times 1 + 2 \\ &= 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + 2 \times 2 + 2 \\ &= 6 + 4 + 2 = 12 \end{aligned}$$

on veut démontrer que pour tout n , $v_n = n(n+1)$

Faisons une démonstration par récurrence sur n .

- initialisation: au rang 0. $v_0 = 0 = 0 \times (0+1)$

La formule est vraie pour $n=0$

- hérédité: ~~on~~ fixons n .

hypothèse de récurrence: $v_n = n(n+1)$

on veut montrer qu'alors $v_{n+1} = (n+1)(n+2)$

on a: $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$ (par définition de la suite)

$$= n(n+1) + 2n + 2$$

(d'après H.R.)

$$= n^2 + n + 2n + 2$$

$$= n^2 + 3n + 2$$

$$\underline{\text{Or}} \quad (n+1)(n+2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2$$

H.R.: hypothèse
de récurrence

on a donc $v_{n+1} = (n+1)(n+2)$

La propriété est donc héréditaire

- Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n(n+1)$

~~Ex 4~~ Ex 4 p. 22

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

donc $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$
 $u_2 = 2u_1 - 3 = -2 - 3 = -5$

$$(2 \cdot 2)^{n+1} \\ 2^1 2^{m+1} = 2$$

Démontrons, par récurrence, que pour tout n : $u_n = 3 - 2^{n+1}$

• Initialisation: La formule est vraie pour $n=0$ car $3 - 2^{0+1} = 1 = u_0$

La _____ $n=1$ car $3 - 2^2 = 3 - 4 = -1 = u_1$

• Hérédité:

hypothèse de récurrence: pour n fixé, $u_n = 3 - 2^{n+1}$

on veut démontrer qu'alors: $u_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$

on a: $u_{n+1} = 2u_n - 3$ (par déf. de la suite)

$$= 2(3 - 2^{n+1}) - 3 \quad \text{d'après H.R.}$$

$$= 6 - 2 \cdot 2^{n+1} - 3$$

$$= 3 - 2^{n+2}$$

$$\text{car } 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

Donc la propriété: $u_n = 3 - 2^{n+1}$ est héréditaire.

- Conclusion: Comme la propriété $u_n = 3 - 2^{n+1}$ est initialisée pour $n=0$ et qu'elle est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^{n+1}$

Ex 6 p. 22

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 3 = 5$$

montrons par récurrence que : $u_n \leq 6$ pour tout n .

- Pour $n=0$, l'inégalité est vraie car $u_0 = 2 \leq 6$.
- Hypothèse de récurrence : Pour n fixé, $u_n \leq 6$

on sait, d'après HR : $u_n \leq 6$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 6$$

Donc la propriété est héréditaire.

- conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$